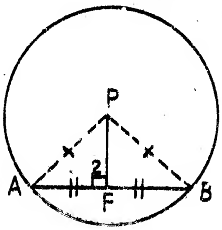
$\overline{FA} = \overline{FB}$ . . . . F نقطه تنصیف است.

لذا $\hat{PFA} = \hat{PFB}$

چون $\hat{PFA} + \hat{PFB} = 180^\circ$

$\hat{PFA} + \hat{PFA} = 180^\circ$

$\hat{PFA} = 90^\circ$



شکل (۱۸-۸)

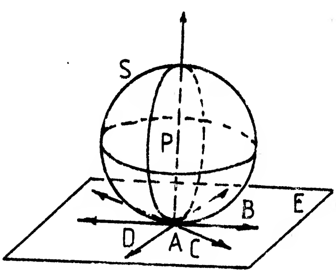
سوالات :

۱ - آیا سه نقطه سطح کره بالای یک خط مستقیم واقع شده می تواند؟

۲ - اگر شعاع یک کره 15cm باشد و یک وتر آن از مرکز 9cm دور واقع باشد طول وتر را دریافت نمائید؟

۳ - اگر طول وتر یک کره 12cm باشد و این وتر از مرکز 6cm دور واقع باشد شعاع کره را دریافت نمائید؟

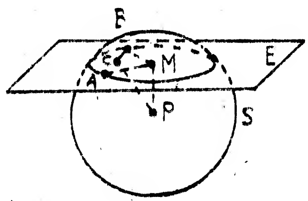
۴ - کره S در نقطه A به مستوی E مماس است P مرکز کره S، نقاط C، B و D در مستوی E واقع اند مناسبت $\overline{PA}$ با $\overline{AB}$، $\overline{AC}$ و $\overline{AD}$ چیست شکل (۱۹ - ۸) .



شکل (۱۹-۸)

۵ - اگر قطر دو کره باهم عمود باشند ثابت نمائید شکل که از توصل انجام قطرها در پی حاصل می شود مربع است .

۶ - مستوی E کره S مطابق شکل (۲۰-۸) را قطع می نماید P مرکز کره S است نقاط A، B، C و M بر مستوی E واقع است A و B در سطح کره S هم واقع است



شکل (۲۰ – ۸)

طوریکه $\overline{PM} \perp E$

$\overline{AM} \perp \overline{MB}$

$\overline{AC} = \overline{BC}$

$\overline{AM} = \overline{PM}$

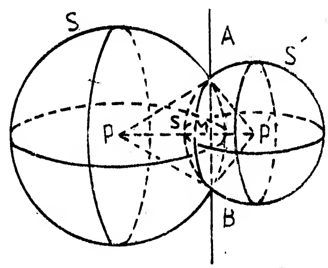
$\overline{AB} = 5$ باشد

a – شعاع کره را دریافت کنید؟

b – اندازه زاویه $\hat{APB}$ چند است؟

c – $\overline{PC} = ?$

۷– درشکل (۲۱ – ۸) P و $\bar{P}$ مراکز کره های S و $\bar{S}$ است. A و B دو نقطه تقاطع کره های مذکوراست $\overline{AB}$ و $\overline{P\bar{P}}$ درنقطه M متقاطع اند و $\overline{PA}$ مماس به $\bar{S}$ در نقطه A است.



شکل (۲۱ – ۸)

اگرشعاع کره S عبارت از 12cm باشد وهم اگر $\overline{PA} = \overline{AB}$ باشد شعاع کره $\bar{S}$ وفاصله بین مراکز کره ها را دریافت نمائید؟

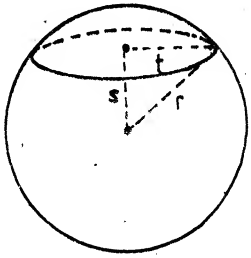
(۱۰ – ۸) حجم کره :

اتحاد جسم، تشر و داخل کره را حجم کره نامند.

تاالحال بهترین وسیله جهت دریافت حجم اجسام اصل دوم (Caralieri's) بوده است، اصل دوم برای دریافت حجم کره، وقتی استعمال شده می تواند که جسم دیگری دریافت شود که مساحت تقاطع آن با مساحت مقاطع کره در ارتفاعات مختلف مساوی باشد.

(۱۱ - ۸) مساحت مقطع کره :

کره با شعاع r داده شده است مقطع افقی کره مذکور با یک مستوی عبارت از یک سطح دایروی می باشد اگر مقطع کره به اندازه s از مرکز کره مسافه داشته باشد وشعاع مقطع t باشد مطابق شکل (۲۲ - ۸).

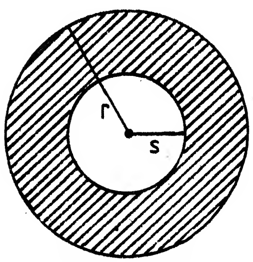


شکل (۲۲-۸)

ودعوی فیثاغورث داریم که :

$$t^2 = r^2 - s^2$$

مساحت مقطع As که از مرکز کره به فاصله s واقع است عبارت است از :



شکل (۲۳ - ۸)

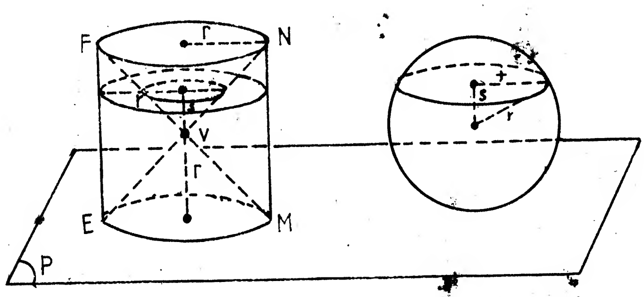
$$As = \pi t^2$$

$$As = \pi(r^2 - s^2)$$

$$As = \pi r^2 - \pi s^2$$

فارمول اخیر مساحت یک حلقه را ارائه می نماید که داخل دایره به شعاع r وخارج دایره به شعاع s واقع شده است شکل (۲۳-۸) .

حالا بدون از کره ما جسم دیگری را دریافت می نمائیم که مقطع آن مطابق فورمول $As = \pi r^2 - \pi s^2$ محاسبه شود .



شکل (۲۴-۸)

اگر کره به مستوی P مماس باشد طوریکه شعاع کره r ، شعاع مقطع t وفاصله مقطع از مرکز کره S باشد درعین مستوی یک ساحه دایروی به شعاع r را در نظر میگیریم وبالای آن استوانه به ارتفاع 2r اعمار می نمائیم تشکل (۲۴ – ۸) .

فرضاً V نقطه تنصیف خط مستقیم (محور استوانه) که قاعده فوقانی وتحتانی استوانه را باهم وصل می نماید باشد . حالاً دو مخروط را میسازیم که V راس آنها وقاعده فوقانی وتحتانی استوانه قاعده آنها باشد.

متباقی جسم که خارج مخروط ها وداخل استوانه واقع گردیده است جسم مطلوب می باشد

زیرا :

هر مقطع آن یک حلقه است که مساحت حلقه به فاصله S از راس مخروط عبارت است از :

$$A_S = \pi (r^2 - S^2)$$

نوت : شعاع مقطع مخروط را چنین دریافت نموده بودیم

$$\bar{r} = \frac{K}{h} \cdot r$$

در این شکل روابط ذیل موجود است :

$$\begin{cases} K = S \\ h = r \end{cases}$$

$$\bar{r} = \frac{S}{r} \cdot r = S$$

پس حجم VMN و VFE وکره به شعاع r باهم مساوی است حجم جسم VMN و VFE را به آسانی محاسبه نموده می توانیم

$$V = \text{حجم استوانه} - \text{حجم دودانه مخروط}$$

$$V = (\pi r^2)\, 2r - 2\left(\frac{1}{3}\pi r^2\right) \cdot r$$

$$V = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

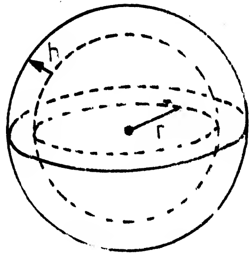
فارمول فوق حجم کره را ارائه می نماید

(۱۲ـ۸) مساحت سطح کره :

مساحت سطح کره را می توانیم قرار ذیل محاسبه نمائیم فرضاً کره به شعاع r داده شده است الحال کره راکه شعاع آن r است توسط کره که شعاع آن $r + h$ است محاصره می نمائیم ساحه که بین سطح کره خارجی که شعاع آن $r + h$ و کره داخلی که شعاع آن r است بنام قشر یاد می شود شکل (۲۵-۸) را ملاحظه نمائید . اگر مساحت قشر A ، حجم قشر V وارتفاع آن h باشد رابطه ذیل موجود است

$$V \approx A \cdot h$$

اگر h بسیار کوچک باشد رابطه درست است (مثلاً اگر یک توپ که شعاع آن یک سانتی متر باشد وآنرا به ضخامت $\frac{1}{100}$ سانتی متر رنگ آمیزی نمائید پس حجم رنگ مورد ضرورت $\frac{1}{100} A$ می باشد در این صورت $h = \frac{1}{100} cm$ است)



شکل (۲۵-۸)

چون $V \approx A \cdot h$

$$\frac{V}{h} \approx A$$

اگر h به طرف صفر تقرب نماید یعنی

$$\lim_{h \to 0} \frac{V}{h} = A$$

الحال می توانیم $\frac{V}{h}$ دقیقاً محاسبه نمائیم چون V فرق حجم دو کره است

$$V = \frac{4}{3} \pi (r+h)^3 - \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi [(r+h)^3 - r^3]$$

$$v = \frac{4}{3}\pi\,[\,r^3 + 3r^2h + 3rh^2 + h^3 - r^3\,]$$

$$v = \frac{4}{3}\pi\,[\,3r^2h + 3rh^2 + h^3\,]$$

$$\frac{v}{h} = \frac{4}{3}\pi\,[(\,3r^2 + 3rh + h^2\,)$$

اگر $h \to 0$ شود حدودکه دارای حروف h باشد صفری شوند.

$$\frac{v}{h} \approx 4\pi r^2$$

چون قبلاً گفتیم که $A = \frac{v}{h}$ است .

$$A = 4\pi r^2$$

سوالات

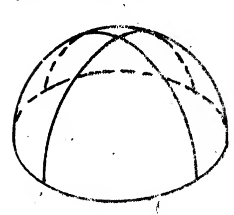
۱- مساحت سطح و حجم کره را دریافت نمائید که شعاع آن 4 cm باشد؟

۲- کره که قطر آن 4cm باشد مساحت سطح آن زیاد است و یا حجم آن؟

۳- کره که قطر آن 10 cm باشد حجم آن اضافه تر است و یا مساحت سطح آن؟

۴- تانک ذخیره کروی دارای شعاع 2m است چند لیتر آب ظرفیت دارد؟

۵- تعمیر جهت ذخیره مواد شکل نیم کره را دارد مطابق شکل (۲۶-۸). اگر برای رنگ نمودن قاعده آن 13 لیتر رنگ ضرورت باشد برای سطح خارجی آن چند لیتر رنگ ضرورت است؟



شکل (۲۶-۸)

۶- اگر شعاع یک کره مساوی به قطر کره دیگر باشد سوالات ذیل را جواب بدهید:

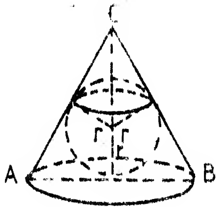
a – نسبت شعاعات دو کره را دریافت کنید؟

b – نسبت مساحت سطح آنها را دریافت نمائید؟

c – نسبت حجم آنها را دریافت نمائید؟

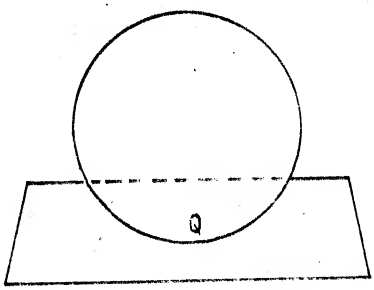
۷ - تقریباً $\frac{3}{4}$ سطح کره زمین همرای آب پوشانیده شده است دریافت نمائید که سطح خشک کره زمین چند میلون کیلومتر مربع است؟ درصورتیکه قطر زمین 12870Km باشد.

۸ - مطابق شکل (۲۷ - ۸) کره داخل مخروط محاط گردیده است اگر $\overline{AB}$ قطر قاعده و C رأس مخروط باشد مثلث $\hat{ABC}$ یک مثلث متساوی الاضلاع است حجم مخروط را از جنس شعاع r کره دریافت نمائید؟



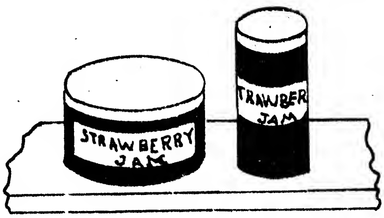
شکل (۲۷ - ۸)

۹ - انجنیر شاروالی که دو متر ارتفاع قد وی است جهت تفتیش داخل تانک کروی شده در محل استاد شد که 5,5m از نقطه اتکای تانک بالاتر بود و سر مذکور محض به جدار تانک تماس نمود و هم میدانست که شهر در یک ساعت 38000 لیتر آب مصرف می نماید انجنیر موصوف فوراً دریافت نمود که یک تانک مملو چند ساعت دوام خواهد نمود شما بگوئید که چطور وی این محاسبه را انجام نمود نتیجه محاسبه وی چند است؟ شکل (۲۸-۸)



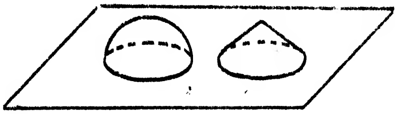
شکل (۲۸-۸)

۱۰ - شکل (۲۹-۸) دو بوتل مربا بالای الماری یک فروشگاه مواد غذائی گذاشته شده است ارتفاع یک بوتل دو چند بوتل دیگر است ولی قطر آن نصف قطر بوتل دومی است قیمت بوتل طویل 23 افغانی و از بوتل کوتاه 43 افغانی است کدام یکی از نقطه نظر مقدار خوبتر است که خریداری شود.



شکل (۲۹-۸)

۱۱ - مطابق (۳۰ - ۸) نیم کره و مخروط عین ارتفاع دارند هر دوی آنها بالای عین مستوی قرار دارند و مستوی دیگری که مماس به رأس مخروط و کره می باشد موازی به مستوی قاعده است نسبت حجم نیم کره بر مخروط را دریافت نمائید ؟



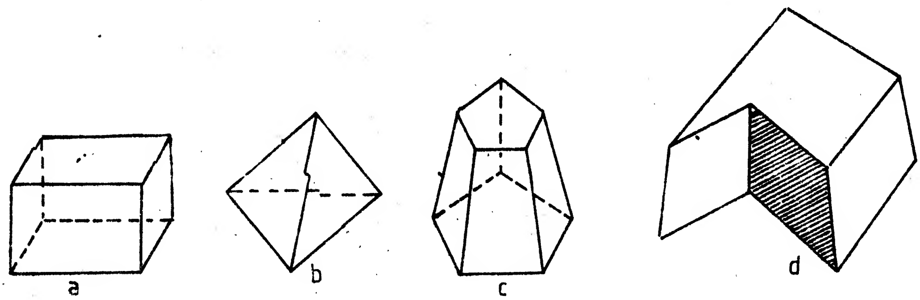
شکل (۳۰ - ۸)

۱۲ - قطی استوانوی باشعاع 12 cm و ارتفاع 25cm باآب مملوگردیده است کره باقطر 20cm داخل قطی استوانوی می گردد بعد ازاینکه کره از قطی خارج گردد چقدر آب به قطی باقی خواهد ماند ؟

فصل نهم

(۱-۹) چند وجهی ها:

جسمی را که از هر طرف بیک چند ضلعی مسطح محدود شده باشد چند وجهی می نامند اشکال (۱- ۹)



اشکال (۱-۹)

هریک از چند ضلعی ها را یک وجه چند وجهی، هریک از اضلاع وجه را ضلع چند وجهی، هریک از رأس وجوه را رأس وجه، زاویه بین دو وجه را زاویه چند وجهی و هر کنجی را که از وجوه عبور کننده در یک رأس پیدا می شود یک کنج چند وجهی نامند.

دو وجه مجاور یک چند وجهی خط الرأس مشترک دارند و دو انجام هر خط الرأس، دو رأس چند وجهی است و از هر کنج چند وجهی حد اقل سه خط الرأس عبور می کند.

(۲-۹) چند وجهی محدب :

چند وجهی محدب آنست که دریک طرف هریک از وجوه خود قرار گیرد اشکال (9-1a,b,c)

(۳-۹) چند وجهی مقعر :

چند وجهی مقعر آن است که دریک طرف یکی ویا چندین وجوه خود قرار گرفته نتواند شکل (9-1-d)

(۴-۹) قطر چند وجهی :

قطعه خط که دو رأس غیر واقع دریک وجه را با هم وصل کند قطر چند وجهی نامیده میشود شکل (۲-۹)

قسمتی از فضاء را میتوان باکمتر از چار مستوی محدود نمود پس هیچ چند وجهی نمی تواند کمتر از چار وجه داشته باشد مقطع هر

شکل (۲-۹)

مستوی با یک چند وجهی محدب همیشه یک چند ضلعی محدب است .

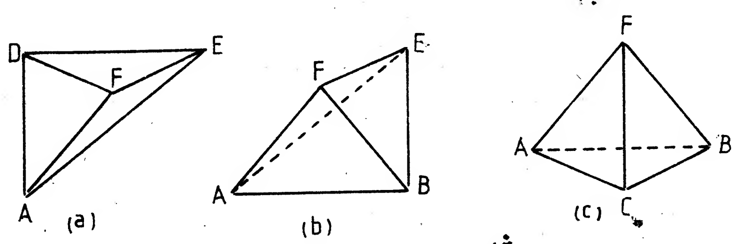
(۵-۹) داخل وخارج یک چند وجهی :

هر چند وجهی فضاء را به سه قسمت مجزا از هم تقسیم می نماید

۱- نقاط که روی وجه های چند وجهی قرار دارد .

۲- نقاط که داخل چند وجهی قرار دارد .

۳- نقاط خارج چند وجهی قرار دارد .



شکل (۳-۹)

a – یک خط مستقیم .

b – یک مستوی .

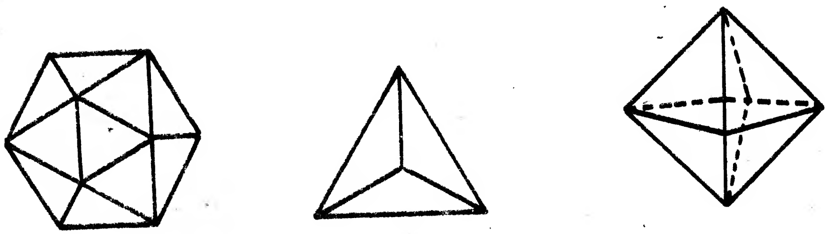
c – فضاء .

۱۳ – نقطه ، خط و مستوی را چرا اصطلاح اولیه نامند ؟

هریک از وجوه چندوجهی محدب عبارت از چند ضلعی محدب است اشکال (۹ - ۳-a-b-c)

(۹-۲) چندوجهی منظم :

یک چندوجهی منظم چندوجهی محدب را می نامند که تمام سطوح آن از مضلعات منظم مساوی تشکیل شده باشد وزوایای آن نیز باهم مساوی باشند اشکال (۹-۴).



شکل (۹-۴)

در هر رأس چندوجهی منظم کنجی محدب تشکیل می شود که مجموع زوایای کنج مذکور از 360° کمتر است پس اگر در یک چندوجهی منظم سطوح آن مثلث ها باشند مثلث های مذکور متساوی الاضلاع است وهم از هر کنج یک چندوجهی منظم می توانید سه مثلث، چار مثلث وپنج مثلث عبور نماید وبس. اشکال (۹-۴).

شما میدانید که هر زاویه مثلث منظم 60° می باشد زیرا مثلث متساوی الاضلاع یکی از چند ضلعی منظم است وامکان تقاطع سه مثلث، چار مثلث وپنج مثلث در یک رأس ممکن است وزیادتر از آن ممکن نیست زیرا:

۱- سه مثلث $3 \times 60^\circ = 180^\circ < 360^\circ$

۲- چار مثلث $4 \times 60^\circ = 240^\circ < 360^\circ$

۳- پنج مثلث $5 \times 60^\circ = 300^\circ < 360^\circ$

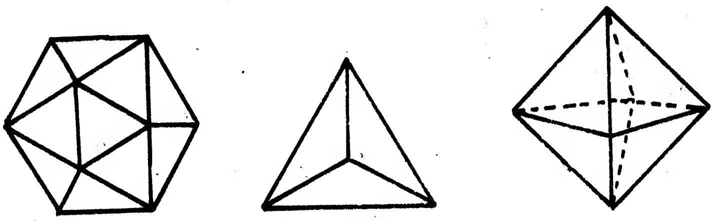
۴- شش مثلث $6 \times 60^\circ = 360^\circ = 360^\circ$

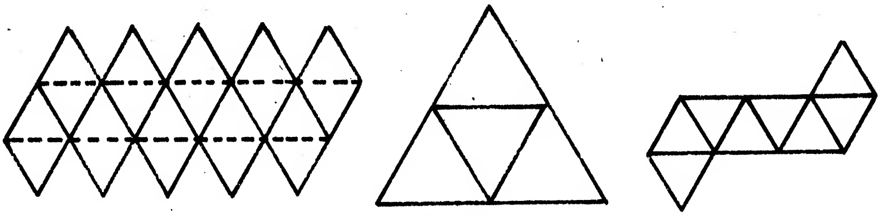
رابطه اخیرالذکر ناممکن است زیرا اگر شش زاویه 60° دریک راُس تقاطع کند سطح مستوی تشکیل خواهد شد و چندوجهی به وجود نه می آید نظر به استدلال فوق توسط مثلث های متساوی الاضلاع که باهم مساوی باشند می توان سه نوع چند وجهی منظم ساخت که عبارت انداز؛

۱- چاروجهی منظم.

۲- هشت وجهی منظم.

۳- بیست وجهی منظم.



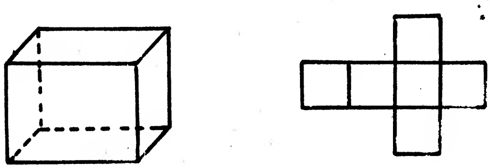


شکل (۶-۹)

دراشکال (۶-۹) چاروجهی، هشت وجهی وبیست وجهی منظم بازشده رامشاهده نموده میتوانید.

(۷-۹) شش وجهی منظم:

این چندوجهی ازشش مربع مساوی تشکیل می گردد وآنرا مکعب می نامند شکل (۷-۹)



شکل (۷-۹)

درهرکنج مکعب سه مربع وجود دارد زیرا؛

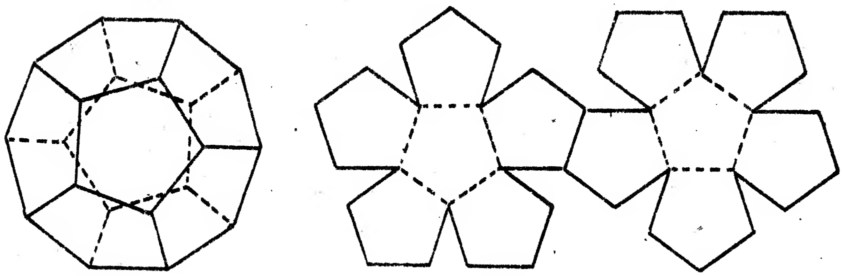
$$3\times90^\circ = 270^\circ < 360^\circ$$

درهرکنج یک چندوجهی ازسه مربع بیشتر نمیتواند وجود داشته باشد زیرا؛

$$4\times90^\circ = 360^\circ = 360^\circ$$

(۸ ـ ۹) دوازده وجهی منظم :

این چند وجهی منظم از دوازده، پنج ضلعی منظم متساوی ساخته می شود شکل (۸ ـ ۹) .



شکل (۸-۹)

و در هر کنج آن سه پنج ضلعی وجود دارد زیرا :

$$3 \times 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$$

و در هر کنج چار پنج ضلعی نمیتواند وجود داشته باشد زیرا :

$$4 \times 108^\circ = 432^\circ > 360^\circ$$

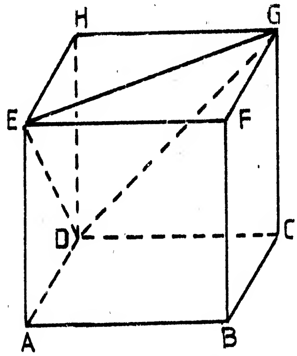
نوت : با شش ضلعی منظم نمیتوان چند وجهی منظم ساخت زیرا هر زاویه شش ضلعی منظم 120° است و $3 \times 120^\circ = 360^\circ$ یعنی در هر کنج زاویه 360° ساخته می شود که این موضوع ناممکن است پس تعداد چند وجهی های منظم فقط پنج نوع است که آنها را اجسام افلاطونی گویند.

جدول مقابل مشخصات چند وجهی های منظم را نشان میدهد.

نام جسم	عده اضلاع هر وجه	تعداد خط الراس منتهی بیک رائس	عده رائس ها	تعداد خط الرائس ها
چار وجهی	۳	۳	۴	۶
هشت وجهی	۳	۴	۶	۱۲
بست وجهی	۳	۵	۱۲	۳۰
شش وجهی	۴	۳	۸	۱۲
دوازده وجهی	۵	۳	۲۰	۳۰

تمرینات

۱- در شکل (۹-۹) تعداد خط الرأس و تعداد کنج های هر شکل چند عدد است ؟



شکل (۹-۹)

۲- اگر یک ضلع مکعب 5cm باشد؟

a - اندازه زوایای هر کنج آن چند درجه است ؟

b - قطر مکعب را دریافت نمائید ؟

c - قطر یک وجه آن چند است ؟

d - تعداد قطرهای مکعب فوق را معلوم نمائید ؟

e - خطوط نقطه چین چه معنی را افاده می نماید؟

۳- هر زاویه یک پنج ضلعی منظم چند درجه است؟

۴- هر زاویه یک شش ضلعی منظم چند درجه است ؟ آنرا چطور دریافت می کنید ؟

۵ - هر زاویه یک مثلث منظم چند درجه است ؟

۶- آیا یک مستطیل یک شش وجهی منظم است ؟

۷- مکعب شکل (۹-۹) داده شده است و اندازه زوایای ذیلاً را دریافت نمائید ؟

a - $\widehat{DHE}$

b - $\widehat{DEH}$

c - $\widehat{HGD}$

d - $\widehat{EGD}$

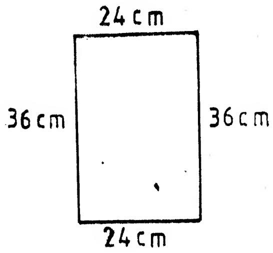
e - گسترده و یا باز شده شکل (۹-۹) رسم نمائید ؟

تمرینات

محیط ، مساحت ، حجم :

I– محیط : خط و یا مجموع خطوط که یک شکل را احاطه نموده باشد محیط نامیده می شود

مثال: محیط شکل (۱) را محاسبه نمائید؟



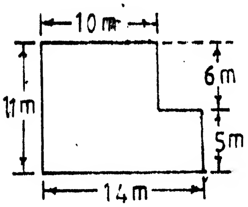
شکل (۱)

حل:

$$24cm + 36cm + 24cm + 36cm = 120cm$$

لذا محیط مستطیل فوق 120cm است .

مثال: محیط شکل (۲) را محاسبه نمائید؟



شکل (۲)

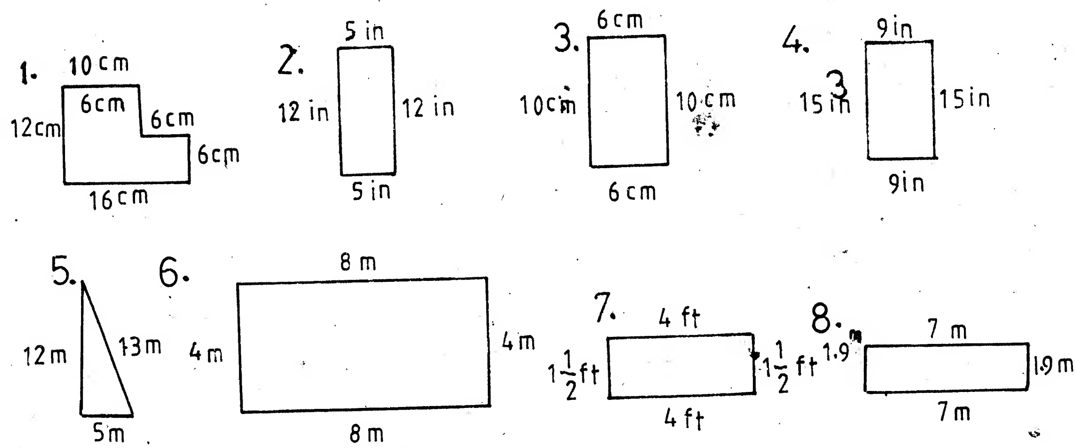
حل:

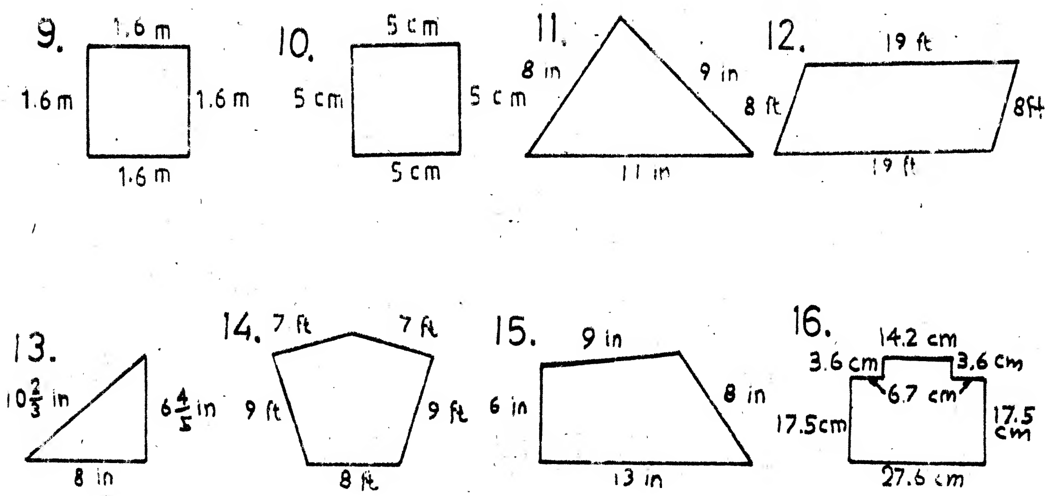
$$4cm + 10cm + 6cm + 5cm + 11cm + 11cm = 50cm$$

لذا محیط چندضلعی فوق 50cm ست .

تمرینات

محیط هریک از اشکال ذیل را دریافت نمائید؟

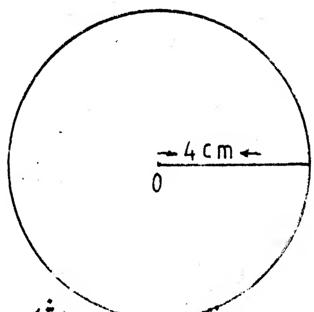




II – محیط دایره : خط منحنی که دایره را احاطه نموده باشد محیط دایره نامیده می شود و توسط فارمول ذیل محاسبه می شود . $C = \pi d$

C عبارت از محیط d قطر دایره و $\pi = \frac{22}{7} = 3,1416$ یک عدد ثابت است .

مثال : محیط دایره را دریافت نمائید که قطر آن 8cm باشد شکل (۳) .



شکل (۳)

حل :

$C = \pi d$

$C = 3,1416 \times 8cm$

$C = 25,1328cm$

تمرینات :

محیط دوایر ذیل را دریافت نمائید درصورتیکه قطر آنها قرار ذیل باشد :

1/ 3m　　2/ 9,3m　　3/ 32m　　4/ 100,48m

5/ 53,38cm　　6/ 1,7cm　　7/ 21,6m　　8/ 20cm

9/ 5,2cm　　10/ 14,7Km　　11/ 8,9mm　　12/ 3,8mm

محیط دایره های را دریافت نمائید که شعاع آنها قرار ذیل باشد :

1/ 5cm　　2/ 3,6m　　3/ 13Km　　4/ 7,2DM

5/ 20m　　6/ 9,5mm　　7/ 18cm　　8/ 13,8cm

III ـ مساحت مستطیل : مساحت مستطیل عبارت از طول ضرب عرض آن می باشد .

اگر مساحت را به A وطول مستطیل را به L وعرض آن را به W نشان دهیم

$$A = L \cdot W$$

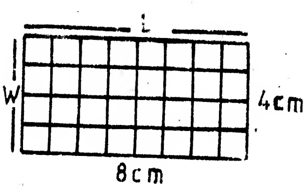
مثال : مساحت شکل (۴) را دریافت نمائید

حل :

$$A = L \cdot W$$

$$A = 8cm \times 4cm$$

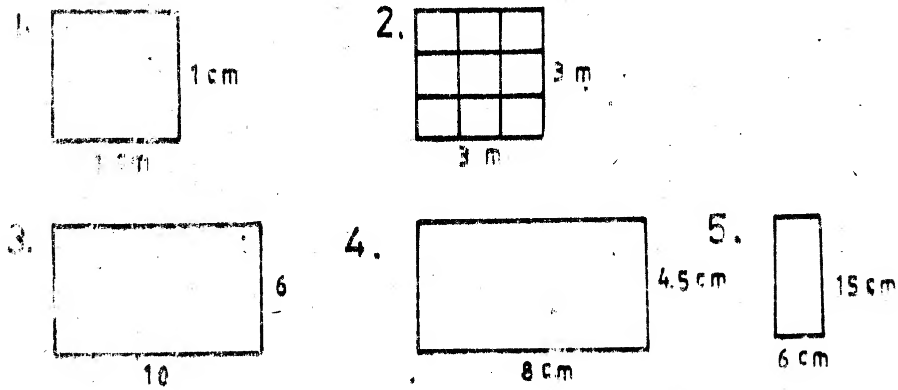
$$A = 32\,cm^2$$



شکل (۴)

تمرینات :

مساحت اشکال (5) را دریافت نمائید ؟

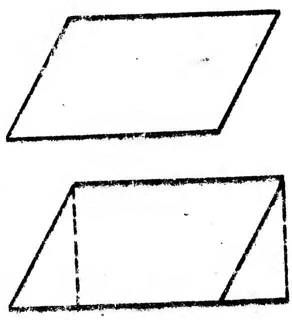


شکل (۵)

IV - مساحت متوازی الاضلاع :

مساحت متوازی الاضلاع مساوی به حاصل ضرب قاعده در ارتفاع آن است شکل (۲) را ملاحظه نمائید اگر مساحت متوازی الاضلاع را به A ، قاعده آنرا به b وارتفاع آنرا به h نشان دهیم

$A = b \cdot h$



شکل (٦)

مثال : مساحت متوازی الاضلاع را دریافت نمائید که طول قاعده آن 15 cm وارتفاع آن 10,3cm باشد شکل (۷) .

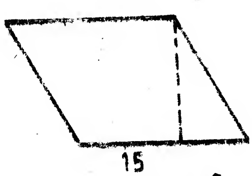
حل :

$A = b \cdot h$

$b = 15cm , h = 10,3 cm$

$A = (15cm)(10,3cm)$

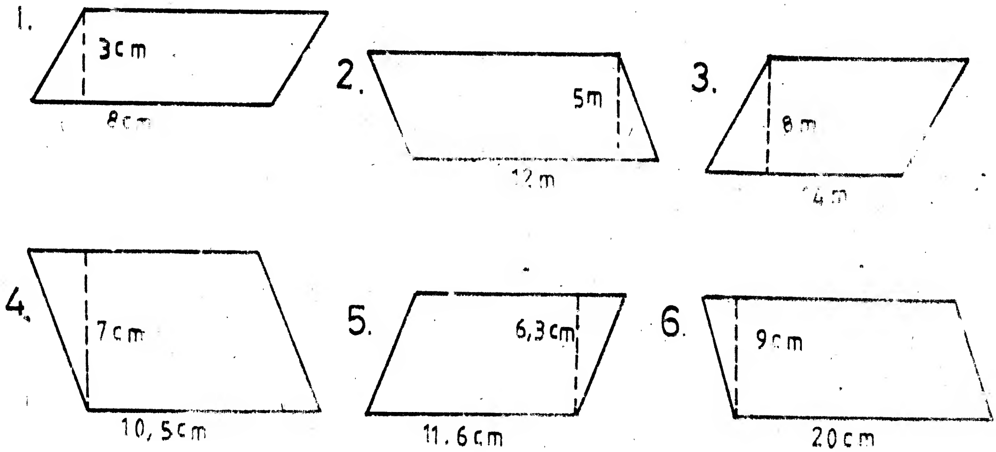
$A = 154,5 cm$



شکل (۷)

تمرینات :

مساحت اشکال (۸) را دریافت نمائید ؟



اشکال (۸)

V ـ مساحت مثلث :

مساحت یک مثلث مساوی به حاصل ضرب نصف قاعده ضرب در ارتفاع آن می باشد شکل (۹)

$$A = \frac{1}{2}\, b \,.\, h$$

مثال : مساحت مثلث را دریافت نمائید که طول یک ضلع آن 20cm وارتفاع آن 15cm باشد

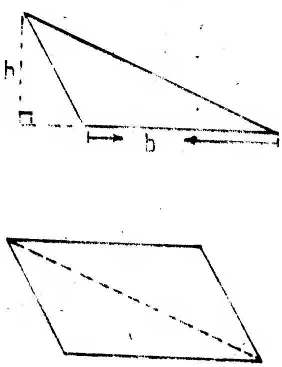
حل :

$$A = \frac{1}{2}\, b \,.\, h$$

$$A = \frac{1}{2}(20\,\text{cm})\,(15\,\text{cm})$$

$$A = 10\,\text{cm} \,.\, 15\,\text{cm}$$

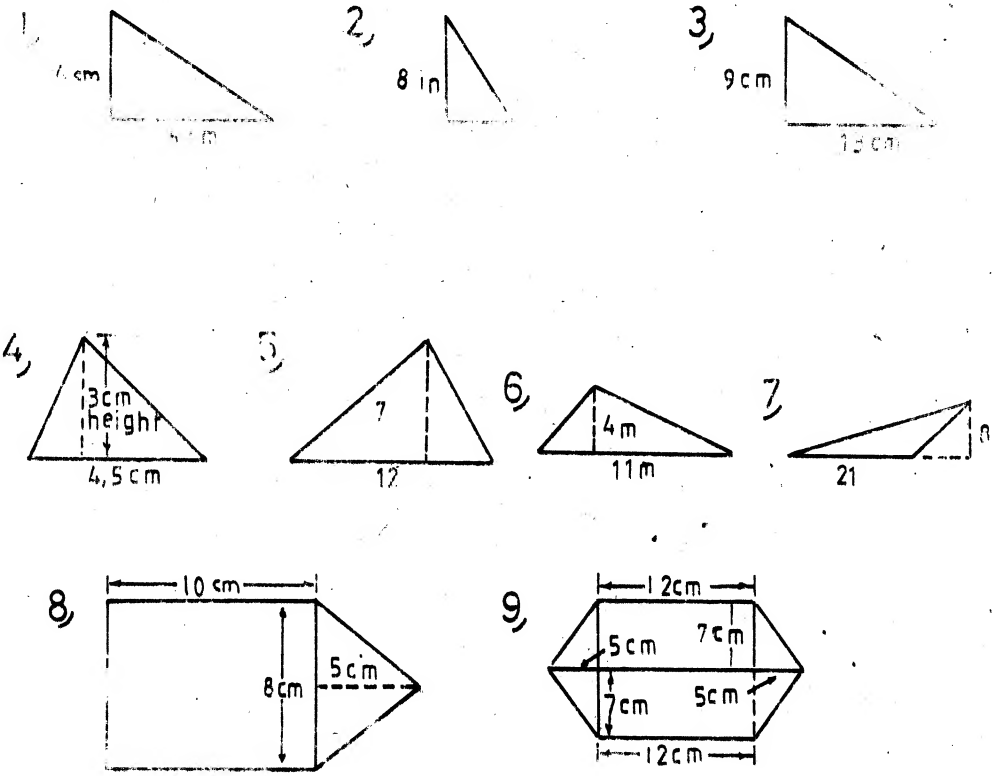
$$A = 150\,\text{cm}^2$$



شکل (۹)

تمرينات :

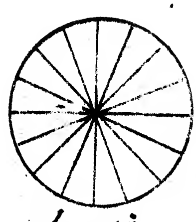
مساحت اشکال (۱۰) را در یافت نمائید ؟



اشکال (۱۰)

VI_ مساحت دایره :

مطابق شکل (۱۱) دایره را به بخش های مساوی تقسیم می نمائیم اگر بخش های تقسیم شده را پهلوی هم قرار دهید شکل مانند متوازی الاضلاع حاصل می شود شکل (۱۲) .



شکل (۱۱)

فصل دوم

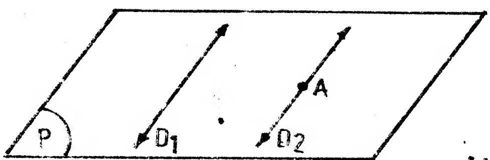
مستقیم های متوازی در فضاء

(۱ـ۲) تعریف :

دو مستقیم زمانی متوازی گفته می شوند که در یک مستوی واقع بوده و نقطه مشترک نداشته باشند عدم نقطه مشترک برای تشخیص متوازی بودن دو مستقیم در فضاء کافی نیست زیرا دو مستقیم متنافر هیچ نقطه مشترک ندارند .

(۲ ـ ۲) دعوی :

از یک نقطه خارج یک مستقیم تنها یک مستقیم موازی به آن رسم نموده می توانیم وبس .

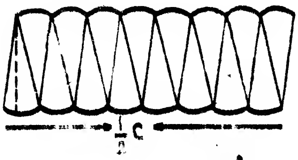


شکل (۱-۲)

ثبوت :- از نقطه A (نقطه A برروی خط D_1 واقع نیست) و خط D_1 تنها یک مستوی P عبور می نماید (۸ـ۱) اصل دوم).

الحال از نقطه A تنها مستقیم D_2 راموازی به مستقیم D_1 در مستوی P رسم نموده می توانیم (ثبوت دعوی را در هندسه سطح مطالعه نموده اید).

شما میدانید که $A = b \cdot h$ عبارت از مساحت متوازی الاضلاع است .



شکل (۱۲)

$A = (\frac{1}{2}C)\,r$ . . . . چرا؟

$A = \frac{1}{2}(2\pi \times r) \times r$ . . . . $C = 2\pi r$

$A = \pi r^2$

مثال : شعاع یک مزرعه دایروی $0,4\,Km$ است مساحت مزرعه مذکور را دریافت نمائید؟

حل: میدانید که $\pi = 3,14$ است.

$$A = \pi r^2$$

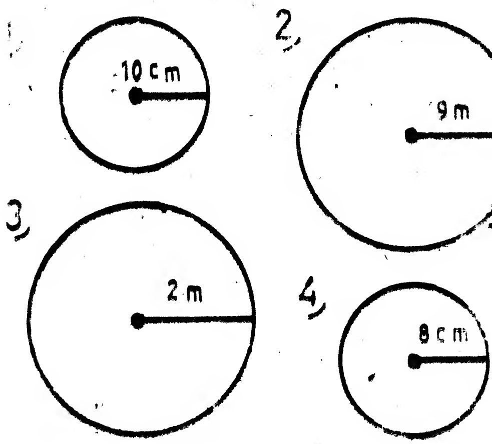
$$A = (3,14) \times (0,4\,Km)^2$$

$$A = 3,14 \times 0,4\,Km \times 0,4\,Km$$

$$A = 0,5024\,Km^2$$

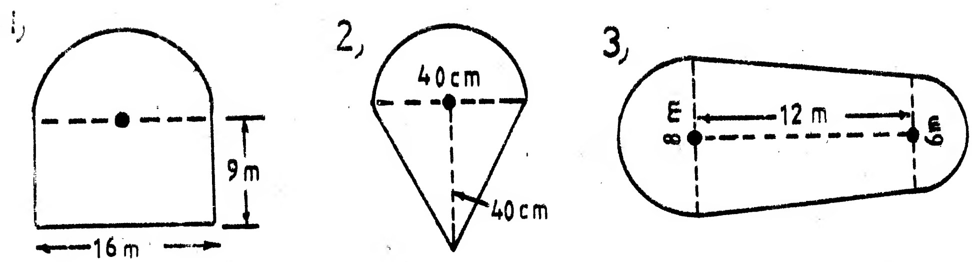
تمرینات :

مساحت اشکال (۱۳) را دریافت نمائید؟

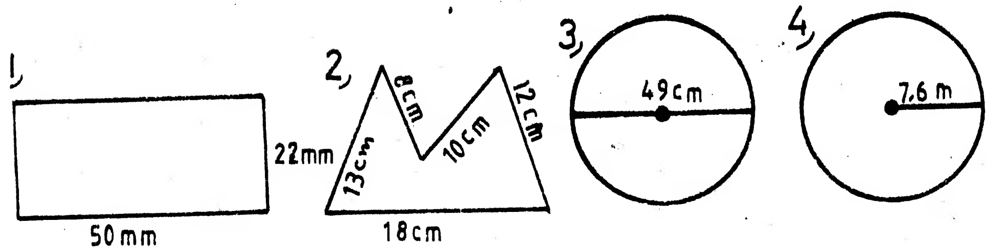


اشکال (۱۳)

مساحت اشکال ذیل را محاسبه نمائید



مساحت اشکال (۱۴) را محاسبه نمائید .



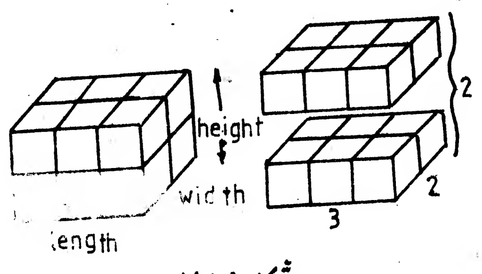
اشکال (۱۴)

VII حجم مکعب مستطیل : حاصل ضرب طول، عرض وارتفاع عبارت از حجم مکعب مستطیل است
اگر حجم را به V ، طول را به L ، عرض را به W وارتفاع را به h نشان دهیم شکل (۱۵) .

$$V = L \cdot W \cdot h$$

مثال : حجم مکعب مستطیل را دریافت نمائید که عرض آن 2m ، طول 3m وارتفاع آن 2m باشد شکل (۱۵) .

حل :



شکل (۱۵)

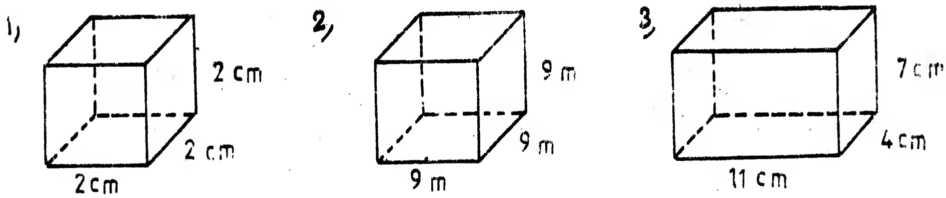
$$V = l \cdot w \cdot h$$

$$V = 2m \cdot 3m \cdot 2m$$

$$V = 12m^3$$

تمرینات :

حجم اشکال (۱۶) را دریافت نمائید

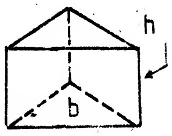


اشکال (۱۶)

VIII- حجم منشور: حاصل ضرب مساحت قاعده ضرب در ارتفاع عبارت از حجم منشور است.

اگر قاعده منشور را به B، ارتفاع را به h و حجم آن را به V نشان دهیم شکل (۱۷).

$$V = B \cdot h$$



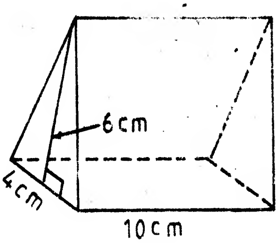
شکل (۱۷)

مثال: حجم منشوری را دریافت نمائید که طول قاعده آن 10cm و عرض قاعده آن 4cm و ارتفاع منشور 6cm باشد شکل (۱۸)

حل: $V = B \cdot h$

$$V = \left(\frac{1}{2} \cdot 6cm \cdot 4cm\right)10cm$$

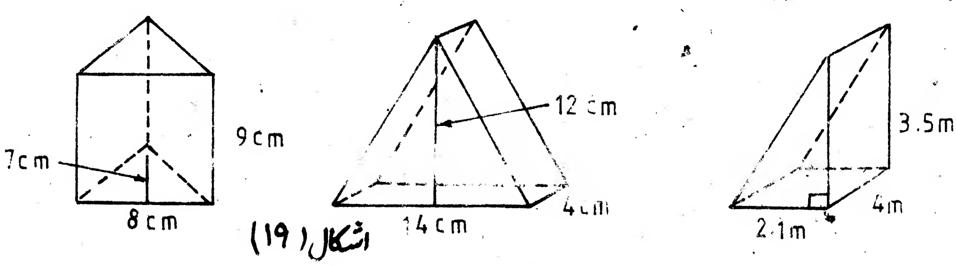
$$V = 120\, cm^3$$



شکل (۱۸)

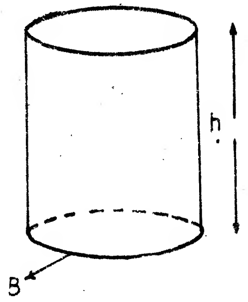
تمرینات :

حجم منشورهای ذیل را دریافت نمائید اشکال (۱۹).



اشکال (۱۹)

IX – حجم استوانه : حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع حجم استوانه است. اگر مساحت قاعده را به B و ارتفاع استوانه را به h نشان دهیم شکل (۳۰). $V = B \cdot h$



شکل (۳۰)

مثال : مساحت استوانه را دریافت نمائید که شعاع قاعده آن 8cm و ارتفاع آن 17cm باشد.

حل :

$$V = B \cdot h = \pi r^2 h$$

$$h = 17\,cm$$

$$r = 8\,cm$$

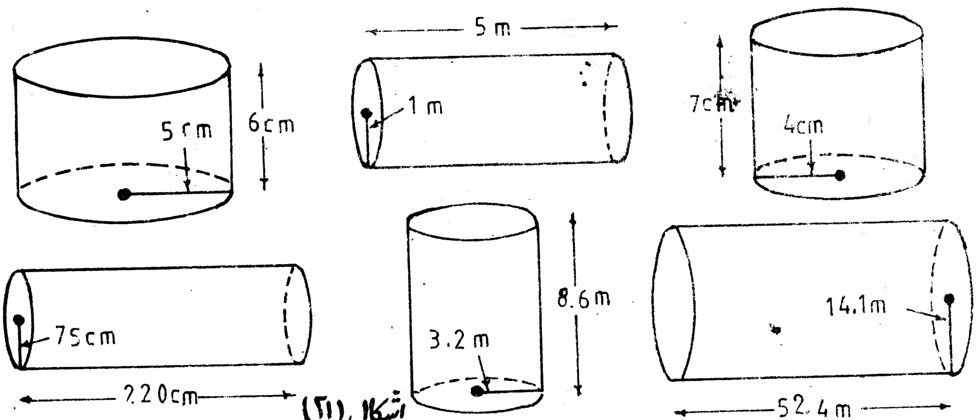
$$V = \pi r^2 h$$

$$= 3{,}14 \times 8cm \times 8cm \times 17cm$$

$$= 3416.32\,cm^3$$

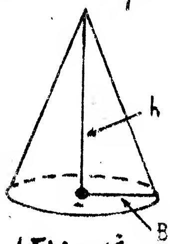
تمرینات :

حجم اشکال (۳۱) را دریافت نمائید؟



اشکال (۳۱)

X- **حجم مخروط** : ثلث حاصل ضرب مساحت قاعده درارتفاع مخروط قایم عبارت از حجم مخروط قایم می باشد.



شکل (۳۱)

اگر شعاع مخروط r ، ارتفاع آن h و حجم آن V باشد شکل (۳۱).

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

مثال : حجم مخروط قایم را دریافت نمائید که r= 7cm و h= 18 cm باشد

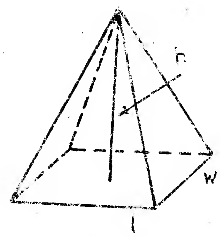
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}(3.14)\times 7cm\times 7cm\times 18cm$$

$$V=923.16\,cm^3$$

XI- **حجم هرم** : ثلث حاصل ضرب مساحت قاعده درارتفاع عبارت از حجم هرم می باشد.

اگر طول قاعده را به l ، عرض آنرا به w وارتفاع آنرا h بنامیم شکل (۳۲).

$$V=\frac{1}{3}l\cdot w\cdot h$$



شکل (۳۲)

مثال : حجم هرم را دریافت نمائید که طول قاعده آن 8cm ، عرض قاعده 15cm وارتفاع آن 20cm باشد.

حل :

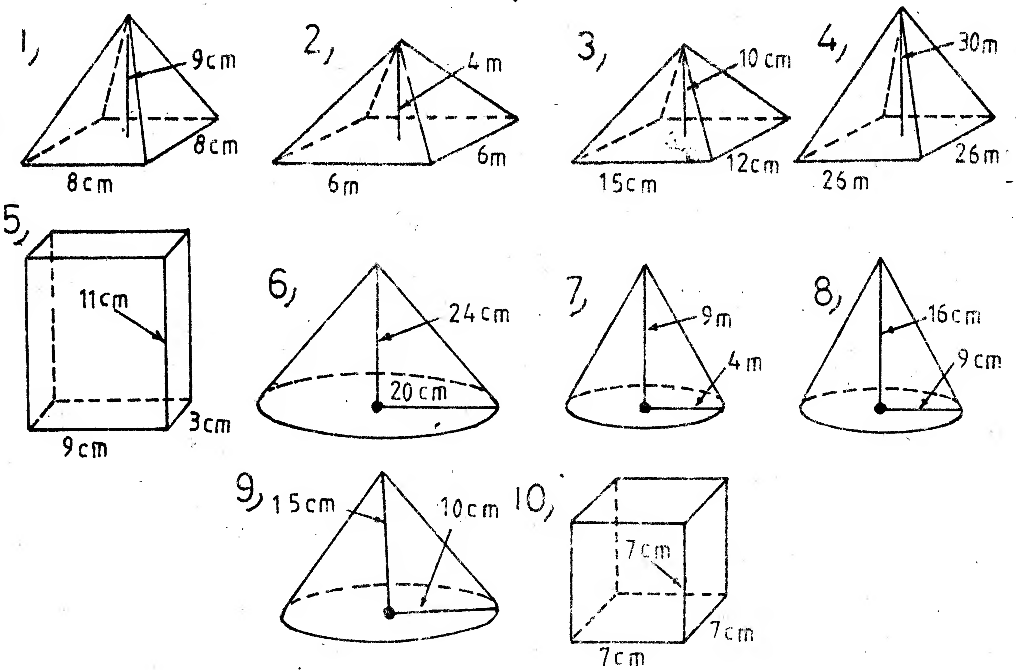
$$V=\frac{1}{3}l\cdot w\cdot h$$

$$V=\frac{1}{3}\times 8\,cm\times 15\,cm\times 20\,cm$$

$$=800\,cm^3$$

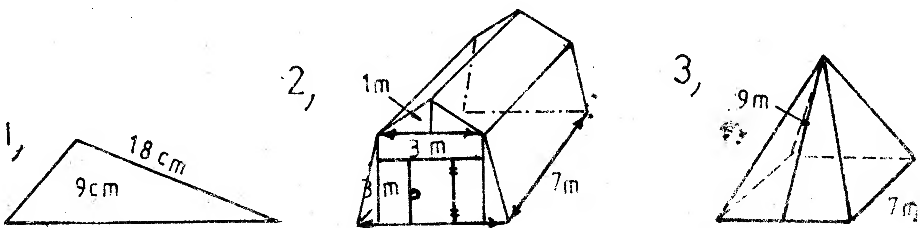
تمرینات :

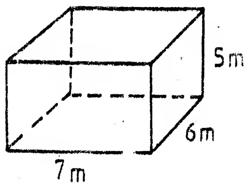
حجم اجسام ذیل را دریافت نمائید ؟

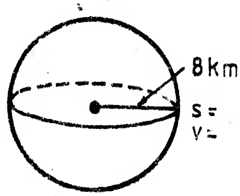


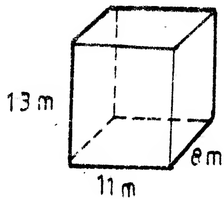
سوالات :

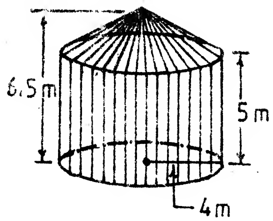
حجم و مساحت سطحیه اجسام ذیل را دریافت نمائید

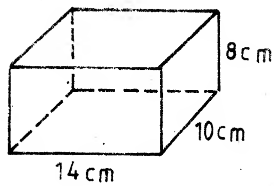


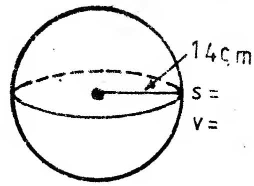

5m
6m
7m

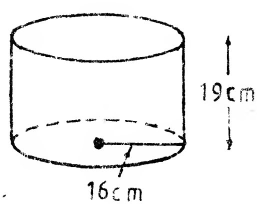

8km
s =
v =

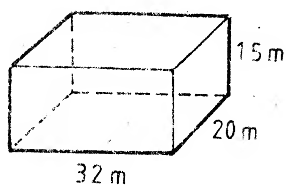

13 m
8m
11 m

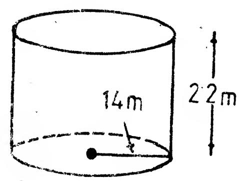

6.5m
5 m
4m

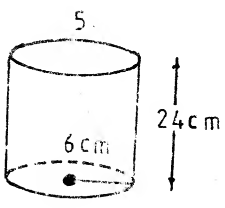

8cm
10cm
14 cm

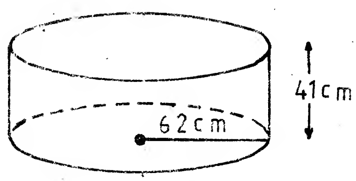

14cm
s =
v =

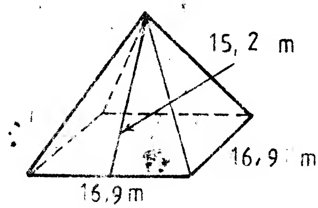

19cm
16cm

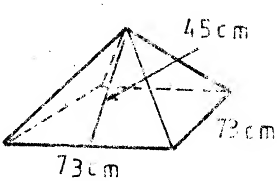

15m
20m
32 m


14m
22m


5
24cm
6cm


41cm
62cm


15, 2 m
16,9 m
16,9m


45cm
73cm
73cm

تعداد چاپ (۲۰۰۰) جلد طبع اول سال ۱۳۷۵
طبع: مطبعه سید جمال الدین افغان (آی - آر - سی)

REFERENCES مآخذ

۱. ۱۳۵۷ کابل. هندسه فضائی برای صنف یازدهم. پوهاند داکتر عبدالعظیم ضیائی .

۲. ۱۳۶۱ تبریز، ایران هندسه سال سوم آموزش متوسط عمومی. دانشگاه تبریز .

3. Moise, E. Edwin and Floyd L. Downs Jr.
Geometry. Menlo Park
Addison - Wesley Publishing Company, 1982.

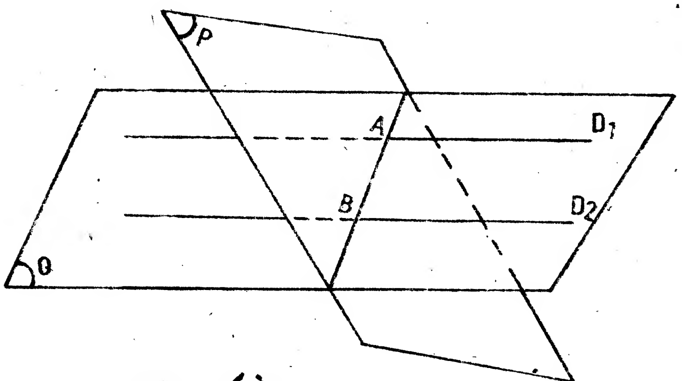
4. Goodwin, A. Wilson, Glen D. Vannatta
and F. Joe Grosswhite
Geometry Columbus:
Charles E. Merrill Publishing Co., 1970.

دعوی فوق درصورتیکه نقطه وخط درفضاء واقع باشند هم صحت دارد زیرا مطابق (اصل ۲ مستوی)
یک نقطه ویک خط مستقیم، یک مستوی را تعین می نماید شکل (۱ـ۲).

(۳ـ۲) دعوی :

هرگاه دوخط مستقیم متوازی باشند ومستوی یکی ازآن ها راقطع نماید دیگرش رانیز
قطع می نماید.

ثبوت :- مستقیم های D_1 و D_2 باهم موازی است اگرمستوی P مستقیم D_1 رادرنقطه A
قطع نماید مستوی مذکورمستقیم
D_2 رانیزدریک نقطه مانند B
قطع خواهدنمود نظربه تعریف
مستقیم های موازی D_1 و D_2
یک مستوی Q راتعین می
نماید مستوی های P و Q
یک نقطه مشترک A دارند.



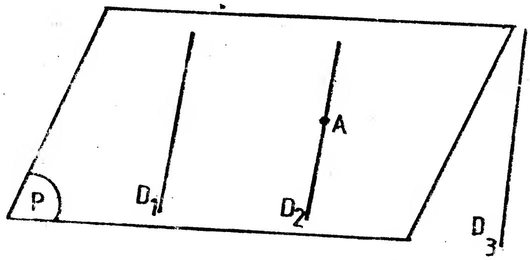
شکل (۲-۲)

(اگردومستوی یکدیگرخودرا دریک نقطه قطع نماید آن ها یک دیگرخودرا به امتدادیک خط مستقیم قطع مینماید)
فصل مشترک مستوی های P و Q ازنقطه A عبورنموده ومستقیم D_2 رادرنقطه مانند B
قطع می نماید زیرا یک خط مستقیم دریک مستوی که یکی ازدوخطوط موازی راقطع نماید دیگرش
رانیزقطع می نماید شکل (۲ـ۲).

(۴ - ۲) دعوی :

اگر مستقیم های $D_3 \parallel D_1$ و $D_3 \parallel D_2$ باشند ثبوت نمائید که $D_1 \parallel D_2$ است .

ثبوت : اگر $D_1 \parallel D_2$ باشد مستوی P هر دوی آنها را در بر دارد و اگر D_1 موازی به D_2 نباشد درین صورت مستوی P که مستقیم D_1 را در بر دارد مستقیم D_2 را در یک نقطه مانند A قطع می نماید چون D_3 موازی به D_2 است آنرا نیز قطع می نماید حالانکه مستوی P مستقیم D_3 را قطع کرده نه می تواند زیرا $D_1 \parallel D_3$ است شکل (۳ - ۲) .

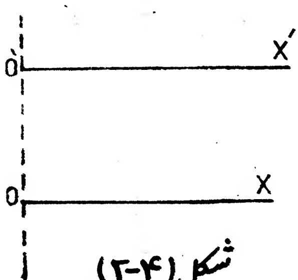


شکل (۳-۲)

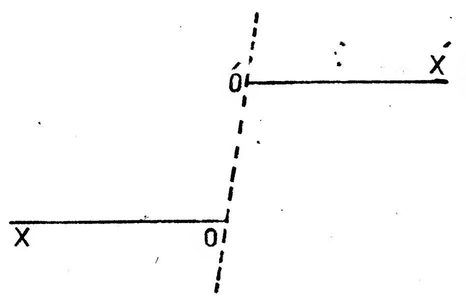
چون $D_3 \parallel D_2$ است پس مستوی P مستقیم D_2 را هم قطع نموده نه می تواند پس مستقیم های D_1 و D_2 شامل یک مستوی می باشند حالا نشان میدهیم که مستقیم های D_1 و D_2 با هم هیچ نقطه مشترک ندارند فرضاً اگر O نقطه مشترک آنها باشد از نقطه O می توانیم دو موازی به D_3 رسم نمائیم که نظر به دعوی (۲ - ۴) ناممکن است پس $D_1 \parallel D_2$ است .

(۵ - ۲) قطعه خط های موازی و هم جهت :

قطعه خط های موازی $\overline{OX}$ و $\overline{O'X'}$ را هم جهت گویند درصورتیکه در مستوی $(\overline{OX}, \overline{O'X'})$ نقاط X و X' به یکطرف خط $\overline{OO'}$ واقع باشند شکل (۴ - ۲) .



شکل (۴-۲)



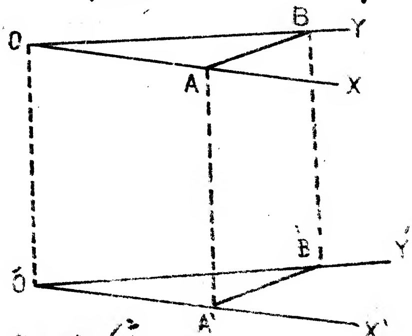
شکل (۱ - ۴ - ۲)

اگر قطعه خط های $\overline{O'X'}$ و $\overline{OX}$ که موازی اند طوری

رسم شده باشند که نقاط X و X' به طرفین خط $\overline{OO'}$ واقع باشند قطعه $\overline{OX}$ و $\overline{O'X'}$ هم جهت نه می باشند شکل (۱-۴-۲).

(۶-۲) دعوی:

دو زاویه در فضا که دارای اضلاع متوازی و هم جهت باشند مساوی می باشند.



شکل (۵-۲)

ثبوت :- زوایای $x\hat{O}y$ و $x'\hat{O'}y'$ را درنظر میگیریم طوریکه $\overline{OX} \parallel \overline{O'X'}$ و $\overline{Oy} \parallel \overline{O'y'}$ بوده و دارای عین جهت نیز می باشند شکل (۵-۲).

بالای OX و X'O' دو قطعه خط مساوی $\overline{OA}$ و $\overline{O'A'}$ وبالای $\overline{Oy}$ و $\overline{O'y'}$ دو قطعه خط مساوی $\overline{OB}$ و $\overline{O'B'}$ را جدا می نمائیم.

قطعه خط های $\overline{OA}$ و $\overline{O'A'}$ موازی، مساوی و هم جهت اند.

لذا شکل OAA'O' یک متوازی الاضلاع است بنابرآن $\overline{AA'}$ و $\overline{OO'}$ باهم موازی، مساوی وهم جهت میباشند وهمچنین شکل OBB'O' یک متوازی الاضلاع است بنابرآن قطعه خط های $\overline{BB'}$ و $\overline{OO'}$ متوازی، مساوی وهم جهت اند. لذا ABB'A' یک متوازی الاضلاع بوده و $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ می باشد.

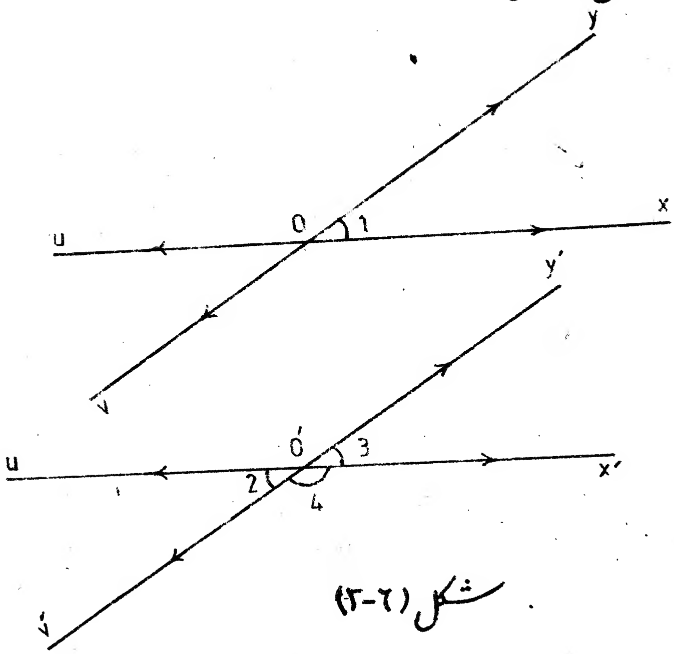
لذا مثلث های O'A'B' و OAB انطباق پذیراند. زیرا $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ ، $\overline{OA}=\overline{O'A'}$ و $\overline{OB}=\overline{O'B'}$ است بنابرآن $A\hat{O}B \cong A'\hat{O'}B'$ است:

نتائج:

I - اگر اضلاع دو زاویه بالترتیب متوازی ودارای جهات مخالف باشند زوایای مذکور باهم مساوی می باشند شکل (۶-۲).

ثبوت : $\hat{1} = \hat{3}$ . . . . دعوی (۶-۲)

$\hat{2} = \hat{3}$ . . . . متقابل بالرأس



شکل (۶-۲)

از مقایسه مساوات های فوق چنین نتیجه می شود که:

$\hat{1} = \hat{2}$

II - اگر یک یک ضلع دو زاویه متوازی و هم جهت و یک یک ضلع دیگر آنها متوازی و دارای جهات مخالف باشند مجموع وسعت این دو زاویه 180° است شکل (۶-۲).

ثبوت :- اضلاع $0x$ و $0'x'$ زوایای $x0y$ و $v'0'x'$ باهم موازی وهم جهت اند واضلاع $0y$ و $0'v'$ زوایای فوق باهم موازی و مختلف الجهت اند بنابر آن:

$\hat{2} + \hat{4} = 180^\circ$ . . . . زوایای یک طرف مستقیم.

$\hat{1} = \hat{2}$ . . . . نتیجه I

پس $\hat{1} + \hat{4} = 180^\circ$ . . . . . می باشد.

(۷-۲) زاویه بین دو مستقیم متنافر:

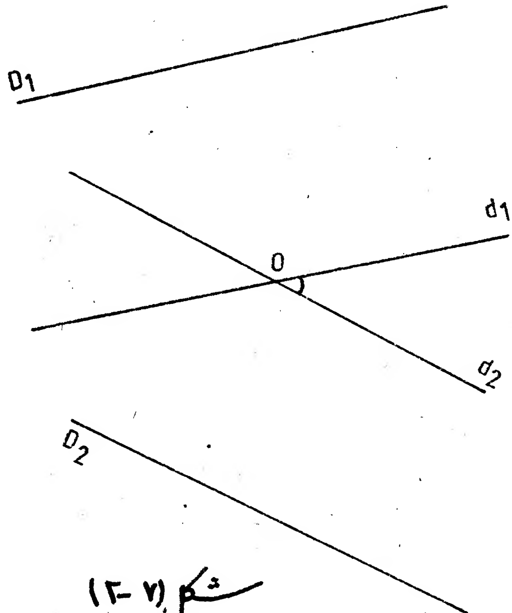
تعریف : زاویه بین دو مستقیم متنافر در فضاء عبارت از زاویه است که توسط ترسیم دو مستقیم موازی به آنها از یک نقطه کیفی در یک مستوی حاصل می گردد.

سوال: زاویه بین دو مستقیم متنافر D_1 و D_2 را دریافت نمائید؟

حل سوال : از یک نقطه کیفی 0 مستوی دو مستقیم موازی $0d_1$ و $0d_2$ را بالترتیب به مستقیم های

متنافر D_1 و D_2 رسم می نمائیم شکل (۷-۲).

چار زاویه که توسط خطوط $0d_1$ و $0d_2$ تشکیل شده اند دو بدو مساوی ویا متمم یک دیگر می باشند واز موقعیت نقطه 0 مستقل اند (نتائج دعوی ۶-۲). یکی از چار زاویه فوق را، زاویه بین دو مستقیم D_1 و D_2 می نامند.



شکل (۷-۲)

نوت: زاویه حاده را بالعموم ترجیح میدهند.

تبصره:

۱- چون نقطه 0 اختیاری است می توان آنرا بالای یکی از مستقیم های D_1 ویا D_2 انتخاب نمود.

۲- اگر یکی ازین دو مستقیم را به موازی آن تعویض نمایم اندازه زاویه تغیر نه می خورد.

۳- اگر $D_2 \parallel D_1$ باشد درین صورت زاویه بین D_1 و D_2 صفر است.

۴- اگر زاویه بین خطوط مستقیم متنافر 90° باشد میگویم مستقیم های مذکور متنافراً بریک دیگر عمود اند.

تمرینات

۱- اگر وسعت دو زاویه باهم مساوی باشد ویک ضلع ازیک زاویه موازی بیک ضلع از زاویه دیگر باشد آیا اضلاع دیگر آنها باهم موازی است چرا؟

۲- اگر اضلاع دو زاویه باهم موازی باشد ثابت نمائید که ناصف الزاویه آن ها موازی ویا باهم عمود اند؟

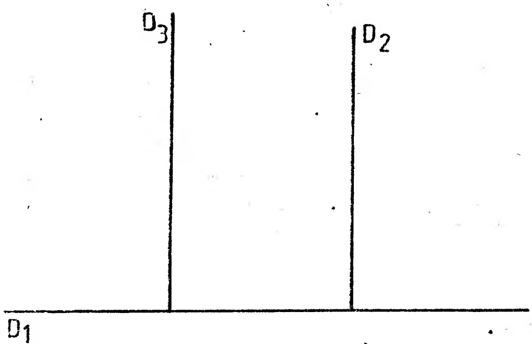
۳- اگر مستوی های E و F باهم موازی و خط مستقیم L_1 در مستوی E و خط مستقیم L_2 در مستوی F واقع باشد آیا $L_1 \parallel L_2$ است؟

۴- اگر دو خط مستقیم بیک مستوی موازی باشند آیا خطوط مذکور باهم عمود شده می توانند؟

۵- اگر مستوی های E و F متقاطع و مستوی P هر دوی آنها را قطع نماید آیا فصل مشترک E و F بافصل مشترک E و P و فصل مشترک F و P موازی است؟

(۸ – ۲) دعوی :

اگر مستقیم های D_2 و D_3 متوازی باشند هر مستقیم D_1 که یکی از آن ها عمود باشد به دیگر آن نیز عمود می باشد.

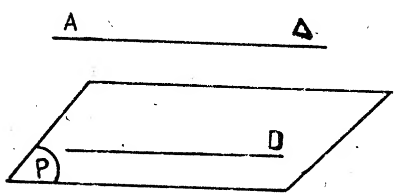


شکل (۸-۲)

ثبوت :- اگر مستقیم های D_2 و D_3 باهم موازی باشند هر دوی آنها در یک مستوی واقع اند اگر مستقیم D_1 بالای مستقیم D_2 عمود باشد چون D_2 و D_3 درعین مستوی واقع اند پس D_1 و D_3 نیز متعامد اند (ثبوت موضوع درهندسه صنف ۸ است) شکل (۸ – ۲).

(۹-۲) دعوی :

برای اینکه یک مستقیم Δ که درمستوی P شامل نبوده و به این مستوی موازی باشد لازم وکافی است که بیکی از مستقیم های مستوی موازی باشد.

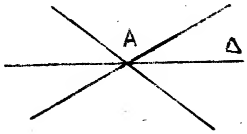


شکل (۹-۲)

۱ – این شرط کافی است .

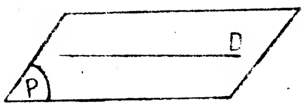
ازنقطه A خارج مستوی P موازی Δ را به مستقیم D مستوی P رسم می نمائیم (ازنقطه A و مستقیم D یک مستوی عبور می نماید).

اگر مستوی P مستقیم Δ را قطع نماید مستقیم D را که موازی به Δ است نیز قطع می نماید (تقاطع D و P خلاف فرضیه است زیرا D درمستوی P واقع است). بنابرآن مستقیم Δ موازی به مستوی P است. شکل (۹-۲).



نتائج :

I- برای ترسیم یک موازی Δ بیک مستوی P چنین عمل می نمائیم درمستوی P یک مستقیم کیفی D را درنظر گرفته وازیک نقطه A خارج مستوی P موازی Δ را به خط D رسم می نمائیم (ازنقطه A و مستقیم D یک مستوی عبور می نماید بنا مسئله به هندسه مسطح ارجاع می گردد).



شکل (۱۰-۲)

II- ازیک نقطه A خارج یک مستوی بی نهایت موازی ها بیک مستوی رسم نموده می توانیم شکل (۱۰-۲).

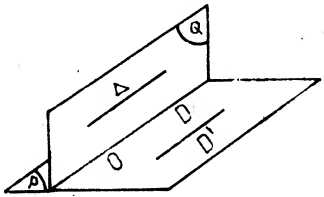
III- اگرنقطه A درمستوی P واقع باشد مستقیم Δ نیز درمستوی P شامل می باشد بنابرآن هرمستقیم که شامل یک مستوی باشد صورت خصوصی موازی به این مستوی می باشد.

2- این شرط لازمی است :

فرضاً اگرمستقیم Δ ومستوی P هیچ یک نقطه مشترک نداشته باشند باید به اثبات برسانیم که درمستوی P اقلاً یک مستقیم موازی به مستقیم Δ وجود دارد. شکل (۱۱-۲).

ثبوت : درمستوی P یک نقطه اختیاری O را انتخاب نموده ومستوی Q را رسم می نمائیم

که از O گذشته و Δ را دربرداشته باشد مستوی های P و Q یک دیگر خود را در امتداد یک مستقیم D قطع می نماید چون مستقیم های D و Δ در مستوی Q واقع بود، و هیچ یک نقطه مشترک ندارند بنابرآن متوازی می باشند. اگر هر مستقیم D́ مستوی P موازی به D باشد موازی به Δ نیز است (دعوی ۴-۲)



شکل (۱۱-۲)

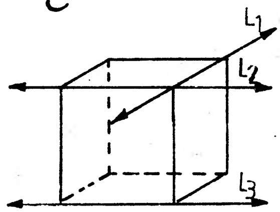
نتایج :

۱- هرگاه یک مستقیم Δ موازی بیک مستوی P باشد مستقیم Δ موازی به فصل مشترک D مستوی P و مستوی Q که مستقیم Δ را دربردارد می باشد شکل (۱۱-۲).

۲- هرگاه یک مستقیم موازی بیک مستوی باشد موازی که از یک نقطه کیفی مستوی به این مستقیم رسم می گردد در مستوی مذکور شامل است (موازی به فصل مشترک P و Q است)

تمرینات

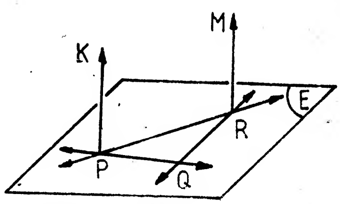
۱- در شکل مقابل موقعیت خطوط L_1 ، L_2 و L_3 را نظر بیک دیگر ذیلاً توضیح نمائید.



شکل (۱۲-۲)

آیا کدام جوره آنها باهم متقاطع، کدام جوره آنها باهم موازی و کدام نامتنافری باشد شکل (۱۲-۲).

۲- در شکل (۱۳-۲) نقاط P ، Q و R بالای یک مستقیم واقع نمی باشند و نقاط مذکور در مستوی E واقع اند در صورتیکه $PK \perp E$ و $RM \perp E$ می باشد ثبوت نمائید $PK \parallel RM$ است.



شکل (۱۳-۲)

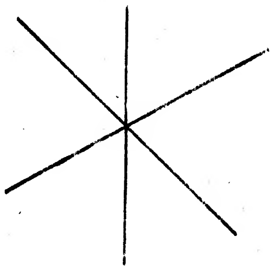
فصل اول

تعریفات

(۱-۱) تعریف (شناساندن) : برای معرفی هرشی صفات مشخص کننده آنرا بیان می نمایند مثلا مکتب جای است که اطفال در سنین معین درآن به فراگرفتن وآموختن پروگرام های خاص می پردازند .

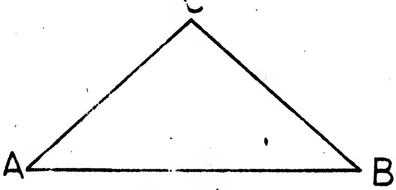
تعریف هرچیز باید صفات وخصوصیات آنرا به اندازه که برای شناختاندنش لازم وکافی هستند شامل باشد نه بیشتر ونه کمتر مثلاً :

اگرگویم (مثلث شکل است که ازتقاطع سه خط مستقیم بوجود آید) تعریف فوق کامل نیست شکل (۱-۱) راملاحظه نمائید ممکن سه خط مستقیم تقاطع نمایند ولیکن مثلث تشکیل نشود .



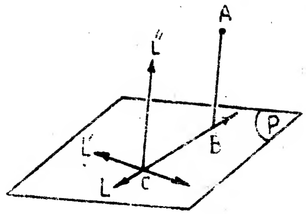
شکل (۱-۱)

اما اگر بگویم (مثلث شکل است که ازتقاطع سه خط مستقیم که دو به دو یک دیگررا درسه نقطه متمایز قطع نمایند بوجودآید) .



شکل (۲-۱)

تعریف فوق کامل است شکل (۲-۱) .



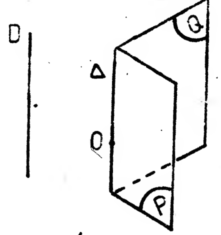
شکل (۱۴-۲)

۳- نقطه A در مستوی P واقع نیست از نقطه A عمود AB بالای مستوی P رسم شده است.
خط L و L′ در مستوی P واقع است طوریکه نقطه B برروی L واقع است وهم L ⊥ L′ و L′ ⊥ L″ است نشان دهید که L″ و $\overline{AB}$ در یک مستوی واقع اند شکل (۱۴-۲).

مستقیم موازی بدو مستوی متقاطع

(۱۰-۲) دعوی:

هرگاه یک مستقیم به هریک از دو مستوی متقاطع موازی باشد مستقیم مذکور به فصل مشترک Δ مستوی های فوق موازی می باشد.



شکل (۱۵-۲)

ثبوت: دو مستوی متقاطع P و Q را در نظر میگیریم که هریک با خط مستقیم D موازی اند شکل (۱۵-۲).

اگر روی فصل مشترک Δ مستوی های P و Q یک نقطه O را انتخاب نموده واز نقطه مذکور یک موازی به مستقیم D رسم نمائیم این موازی با Δ منطبق می باشد زیرا Δ یگانه خط است که شامل هر دو مستوی می باشد.

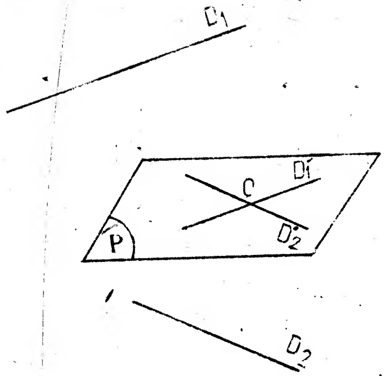
مستوی های موازی بدو مستقیم

(۱۱-۲) دعوی:

ازیک نقطه معین O تنها یک مستوی موازی بدو مستقیم D_1 و D_2 که باهم موازی نباشند

رسم نموده می توانیم نه بیش .

ثبوت : از نقطه O موازی های D'_1 و D'_2 شکل (۱۶ - ۲) را باالترتیب با مستقیم های D_1 و D_2 رسم می نمائیم مستوی P که از نقطه O گذشته و مستقیم D'_1 و D'_2 را در بر داشته باشد با مستقیم های D_1 و D_2 موازی می باشد (چرا ؟)



شکل (۱۶-۲)

نوت : اگر D_1 و D_2 باهم موازی باشند D'_1 و D'_2 باهم منطبق می باشند .

تمرینات

۱- اگر خطوط D_1 و D_2 باهم موازی باشند چند مستوی موازی می توانید با آنها رسم نمائید؟

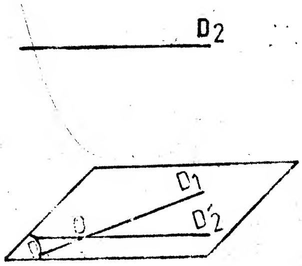
2- اگر خط L بر روی مستوی P عمود باشد آیا تمام مستوی هائیکه خط L در آن واقع است بر روی مستوی P عمود می باشد ؟

3- اگر مستوی های P_1 و P_2 بر روی مستوی P عمود باشند آیا مستوی های P_1 و P_2 باهم موازی است ؟

4- اگر خطوط L_1 و L_2 موازی به مستوی P باشند آیا $L_2 \parallel L_1$ است ؟

دعوی : (۱۲ - ۲)

هرگاه مستقیم D_1 و D_2 باهم موازی نباشند مستوی P را طوری رسم نمائید که مستقیم D_1 را در بر داشته و با مستقیم D_2 موازی باشد



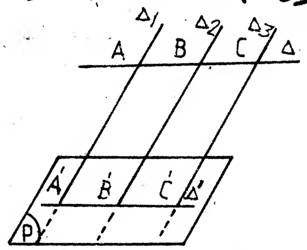
شکل (۱۷-۲)

ثبوت : یک نقطه O را بالای D_1

انتخاب می نمائیم وازنقطه O موازی D'_2 را به خط مستقیم D_2 رسم می کنیم مستوی P که مستقیم های D_1 و D'_2 را دربر می گیرد موازی به خط مستقیم D_2 می باشد زیرا دوخط متقاطع یک مستوی راتعین می نماید شکل (۱۷ - ۲).

(۱۳ - ۲) دعوی :

هرگاه خطوط موازی Δ_1، Δ_2 و Δ_3 توسط مستوی P وخط Δ که بامستوی P موازی است قطع گردند قطعات قطع شده متقابل باهم مساوی اند شکل (۱۸-۲).



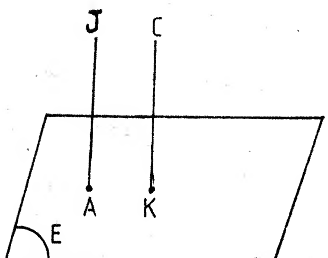
شکل (۱۸-۲)

ثبوت : خط مستقیم Δ خطوط موازی Δ_1، Δ_2 و Δ_3 را درنقاط A ، B و C ومستوی P خطوط مذکوردرنقاط A' ، B' و C' قطع می نماید. خطوط $\overline{AB}$ و $\overline{A'B'}$ باهم موازی اند (Δ موازی به مستوی P است) شکل $AA'B'B$ یک متوازی الاضلاع است پس $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ می باشد وهم می توانید دریافت نمائید که $\overline{BC}=\overline{B'C'}$ است.

تمرینات

۱- کدام یکی ازجملات ذیل صحت است :

a- اگردوخط مستقیم دریک مستوی واقع نباشد حتی باهم موازی می باشند.



b- اگردوخط مستقیم بالای یک مستقیم درد ونقطه مختلف عمود باشد باهم موازی می باشند

c - اگردوخط مستقیم توسط یک مستقیم قطع گردد زوایای متبادله باهم مساوی اند

۲- آیا دوخط مستقیم درفضاء وجود داردکه نه موازی ونه متقاطع باشد؟

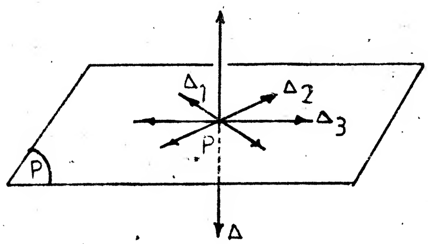
۳- نقاط A و K درمستوی E واقع است طوریکه (A≠K) منطبق نمیباشند اگر JA⊥E و CK⊥E باشد چندمستوی توسط نقاط A، K، C و J تعین میشود شکل (۱۹-۲)

فصل سوم

مستقیم ها و مستوی های متعامد در فضاء

(۱ـ۳) تعریف :

یک مستقیم Δ زمانی بالای مستوی P عمود می باشد اگر تمام مستقیم هائیکه در مستوی P واقع بوده و از نقطه تقاطع مستقیم Δ با مستوی P بگذرد و بالای مستقیم Δ عمود باشند و آنرا چنین ارائه می نمایند $\Delta \perp P$ و یا $P \perp \Delta$ شکل (۱-۳).



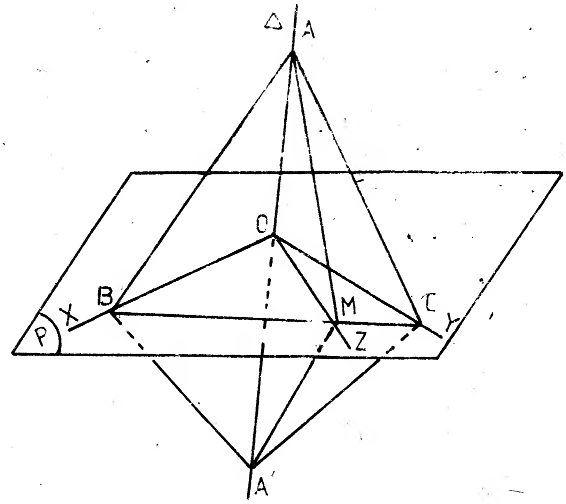
شکل (۱-۳)

در شکل (۱-۳) سه مستقیم رسم گردیده است که از نقطه O عبور کرده اند و بالای مستقیم Δ در نقطه O نیز عمود اند.

(۲ ـ ۳) دعوی :

هرگاه یک مستقیم Δ بالای دو مستقیم که آن را در یک نقطه O قطع کند عمود باشد بالای تمام مستقیم های که در مستوی این دو مستقیم متقاطع واقع اند و از نقطه O بگذرد عمود می باشد .

ثبوت : دو مستقیم $\overline{OX}$ و $\overline{OY}$ را در نظر میگیریم این دو مستقیم بالای مستقیم Δ که از نقطه O عبور می نماید عمود بوده و مستوی P را تشکیل میدهند شکل (۲-۳).



شکل (۲-۳)

در مستوی P یک مستقیم کیفی OZ را در نظر میگیریم. بالای مستقیم Δ دو قطعه خط مستقیم متساوی الفاصله $\overline{OA}$ و $\overline{OA'}$ جدا می کنیم در مستوی P یک قاطع رسم می کنیم که $\overline{OX}$ را در نقطه B و $\overline{OY}$ را در نقطه C و مستقیم $\overline{OZ}$ را در نقطه M قطع نماید.

$\overline{OX}$ و $\overline{OY}$ هر دو عمود های وسطی $\overline{AA'}$ می باشند بنابرآن :

$$\overline{BA} = \overline{BA'}$$

$$\overline{CA} = \overline{CA'}$$

مثلث های ABC و $A'BC$ انطباق پذیر اند در اثنای عملیه انطباق پذیری نقاط B ، C و M مستقر باقی می مانند. نقطه A با A' و $\overline{MA}$ با $\overline{MA'}$ منطبق می شوند بنابرآن :

$$\overline{MA} = \overline{MA'}$$

لذا مثلث MAA' متساوی الساقین بوده. میانه $\overline{MO}$ در عین زمان عمود وسطی $\overline{AA'}$ است پس مستقیم Δ بالای مستقیم $\overline{OZ}$ عمود است.

تمرینات

۱- شکل (۳-۳) یک مستوی را نشان میدهد :

a- آیا کدام نقطه خارج از شکل (۳ -۳) مربوط به مستوی P است ؟

b- آیا مستوی P تمام نقاط خارج شکل (۳ - ۳) را احتوای کند ؟

۲- ترسیمات ذیل را عملی نمائید :

شکل (۳-۳)

a- بالای یک مستقیم افقی یک مستوی عمود رسم نمائید ؟

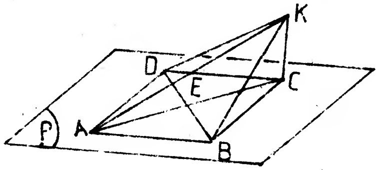
b- بالای یک مستقیم عمودی (شاقولی) یک مستوی عمود رسم نمائید؟

c- درمستوی جزء a ومستوی جزء b سه مستقیم رسم نمائید که از نقطه تقاطع مستقیم ومستوی عبور نمایند رابطه این خطوط با مستقیم های افقی وعمودی چیست ؟

۳- تعریف عمودیت یک خط مستقیم ویک مستوی را بدقت مطالعه نمائید وسوال ذیل راجواب بدهید که درست ویاغلط است ،

" اگر یک مستقیم بالای یک مستوی عمود باشد مستقیم مذکور بالای تمام مستقیم های که درمستوی واقع واز نقطه تقاطع عبور نمیکند عمودی باشد" ؟

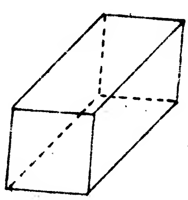
۴- ABCD یک مربع است وهم $\overline{KC} \perp P$ و $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ است .



شکل (۴-۳)

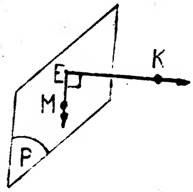
درشکل (۴-۳) چندزاویه قایم رانشان داده می توانید ؟

۵- چندجوره خطهای عمود باهم در شکل (۵-۳) موجود است در صورتیکه هردوخط متقاطع باهم عمود باشند (مکعب مستطیل) .



شکل (۵-۳)

۶- اگر $\hat{KEM} = 90^\circ$ باشد و $\overline{EM}$ درستوی P واقع است آیا می توانید بگوئید که ستوی P بالای خط $\overline{EK}$ عمود است اگر عمود است چرا؟ اگر عمود نیست چرا؟ شکل (۶-۳)



شکل (۶-۳)

۷- در شکل (۷-۳) نقاط G، H، J و E روی ستوی P واقع اند و $P \perp \overline{AB}$ در نقطه E است کدام یکی از زوایای ذیل قایمه است.

1- $\hat{AEJ}$

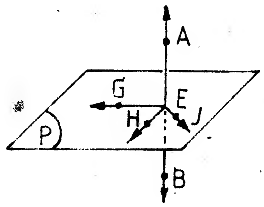
2- $\hat{HEJ}$

3- $\hat{GEH}$

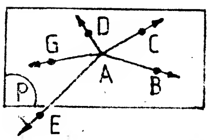
4- $\hat{GEB}$

5- $\hat{HEB}$

6- $\hat{HEA}$

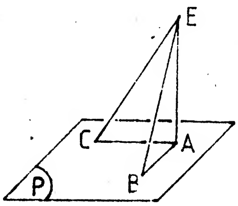


شکل (۷-۳)



شکل (۸-۳)

۸- نقاط A، B، C، D و G در یک مستوی عمودی (شاقولی) P واقع اند و $\overline{AE} \perp P$ است تمام زوایای قایمه که در شکل (۸-۳) موجود است بنویسید.



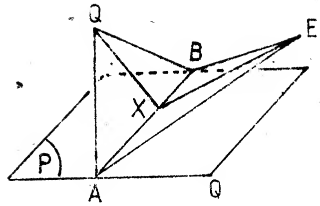
شکل (۹-۳)

۹- در شکل (۹-۳) نقاط A، B و C در ستوی P واقع اند طوریکه $\overline{EA} \perp P$ و $\overline{EC} = \overline{EB}$ است ثبوت نمائید که $\overline{AC} = \overline{AB}$ می باشد.

۱۰- نقاط A، B و X بالای یک مستقیم در ستوی P واقع اند نقاط E و Q در یک طرف مستوی P واقع می باشند اگر $\overline{EA} = \overline{QA}$ و $\overline{EB} = \overline{QB}$ باشد ثبوت نمائید

که $\overline{EX} = \overline{QX}$ است .

آیا ثبوت شما درست است؟ اگر E و Q بدو طرف مخالف مستوی P واقع باشند .



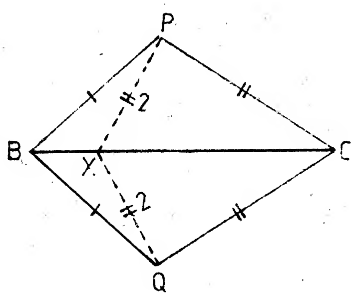
شکل (۱۰ - ۳)

آیا ثبوت شما درست است ؟ اگر E و Q بر روی مستوی P واقع باشند شکل (۱۰ - ۳) .

(۳-۳) دعوی :

اگر نقاط B و C متساوی الفاصله از نقاط P و Q باشند هر نقطه مستقیم $\overleftrightarrow{BC}$ متساوی الفاصله از نقاط P و Q می باشد

الحال یک نقطه کیفی X بروی مستقیم $\overleftrightarrow{BC}$ انتخاب می نمایم و ثابت می نمایم که X متساوی الفاصله از P و Q است شکل (۱۱ - ۳)



شکل (۱۱ - ۳)

ثبوت :

۱- $\overline{BP} = \overline{BQ}$ . . . . فرضیه

۲- $\overline{CP} = \overline{CQ}$ . . . . فرضیه

۳- $\overline{BC} = \overline{BC}$ . . . . مشترک

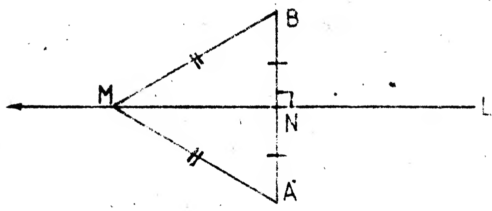
لذا $\triangle BPC = \triangle BQC$ است . پس $P\hat{B}C \cong Q\hat{B}C$ است .

مثلث های $\triangle QBX \cong \triangle PBX$ . . . . دوضلع دوزاویه بین آنها است درنتیجه

$\overline{PX} = \overline{QX}$ می باشد پس X متساوی الفاصله از P و Q است .

نوت : نقاط P ، B ، C و X دریک مستوی واقع اند ولیکن مثلث های BPC و BQC می توانند درمستوی های مختلف واقع گردند.

نتیجه : یک مستقیم L ویک قطعه خط $\overline{AB}$ که هردو دریک مستوی اند داده شده است اگردو نقطه مستقیم L متساوی الفاصله از A و B باشند ثبوت نمائید که L ناصف عمودی قطعه خط $\overline{AB}$ می باشد شکل (۱۲-۳).

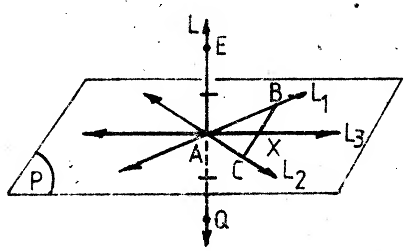


شکل (۱۲-۳)

نوت : ثبوت مربوط شما است.

(۴-۳) دعوی :

اگریک مستقیم بالای دومستقیم متقاطع درنقطه تقاطع آن ها بالای هریک ازآنها عمود باشد ثبوت نمائید که مستقیم مذکور به روی مستوی که توسط خطوط متقاطع تشکیل می شود نیزعمودی باشد اگر L_1 و L_2 دو مستقیم متقاطع درنقطه A باشد.



شکل (۱۳-۳)

خطوط متقاطع مستوی P راتشکیل میدهد

ثبوت می نمائیم که مستقیم L بالای مستقیم L_3 که ازنقطه تقاطع L_1 و L_2 عبور می نماید نیزعمود می باشد شکل (۱۳-۳).

ثبوت :

۱- اگر E و Q دونقطه متساوی الفاصله مستقیم L ازنقطه A باشند پس L_1 و L_2

ناصف های عمودی $\overline{EQ}$ است . . . . دعوی (۳ - ۳) .

۲- نقاط B و C به روی L_1 و L_2 طوری انتخاب می نمائیم که بعد از اتصال، L_3 را در نقطه X قطع نماید.

۳- $\overline{BE} = \overline{BQ}$ . . . . دعوی های (۲-۳) و (۳-۳) .

۴- $\overline{CE} = \overline{CQ}$ . . . . دعوی های (۲-۳) و (۳-۳) .

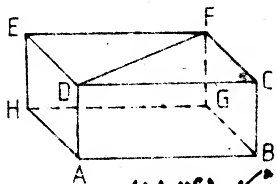
۵- $\overline{XE} = \overline{XQ}$ . . . . دعوی های (۲-۳) و (۳-۳) .

٦- رابطه اخیر نشان میدهد که L_3 ناصف عمودی EQ می باشد.

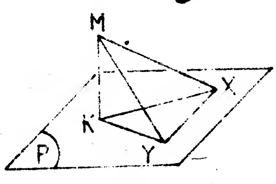
۷- $L_3 \perp L$ . . . . قدم 6 .

۸- $L \perp P$ . . . . قدم های 3 ، 4 ، 5 و 6 .

تمرینات



شکل (۱۴-۳)



شکل (۱۵-۳)

۱- در شکل (۱۴-۳) هر چار ضلعی یک مستطیل است

a- دو مستوی را نام ببرید که بالای AD عمود باشند و بگوئید چرا عمود اند؟

b- سه قطعه خط را نام گیرید که بالای مستوی ABCD عمود باشند ؟

c- آیا زاویه $E\hat{D}F$ قایمه است ؟

d- آیا زاویه DFG قایمه است ؟

۲- در شکل (۱۵ - ۳) $\overline{MY} = \overline{MX}$ ، $\overline{KY} = \overline{KX}$ و $\overline{MK} \perp \overline{KX}$ است

ثبوت نمائید که $\overline{MK} \perp P$ است.

ونیز می توان مثلث را قرار ذیل تعریف نمود ؛

مثلث شکل است که از تقاطع سه خط مستقیم که یکدیگر را دو بدو و در سه نقطه متمایز قطع نموده دارای سه زاویه بوده و در یک مستوی واقع باشد بوجود آید .

تعریف فوق نیز مثلث را معرفی می نماید ولیکن چند جزء اضافی دارد که باید حذف شوند . بناءً تعریف خوب همان تعریف است که از توضیحات اضافی بی نیاز باشد حذف هیچ جزء از آن ممکن نباشد. ویا تعریف باید جامع ومانع باشد .

(۲-۱) درهر قسمت از علوم از قبول اصطلاحات اولیه (Postulate) گریز کرده نمی توانیم در هندسه مانند هر علم دیگر ، بعضی مفاهیم را بدون اینکه تعریف نمایم قبول می کنیم مانند نقطه ، خط ، مستوی وفضاء .

(۳-۱) دلیل ویا برهان (Logical Reason) و عمل ذهن را برهان نامند که از یک سلسله گزارش های قبلی درست به گزارش بعدی می رسد که درستی آنها را براساس آنچه قبلاً پذیرفته شده است می توان قبول کرد.

(۴-۱) قضیه (Theorem) : هر گزارش که درستی آن نیازمند برهان باشد قضیه نامیده می شود .

(۵-۱) اصل متعارفات :

بعضی از گزارش های اولیه وجود دارند که درستی آنها از طریق تجربه ومشاهده واضح وروشن است د ذهن انسان غیر از آنرا اصولاً نمی تواند تصور نماید این نوع گزارش های اولیه را اصول متعارف (بدیهیات) نامند اصول متعارف معمولاً در بخش های مختلف علوم مورد قبول است درهندسه که دانشمندان یونانی قدیم تنظیم نموده اند اصل های متعارف را قرار ذیل بیان نموده اند ؛

۱- دو شئ مساوی بایک شئ ، مساوی بایک دیگراند مثلاً اگر $a = b$ و $b = c$ باشد

۳- نقاط A ، B ، C و D در ستوی P واقع اندطوریکه:

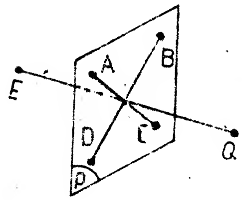
$\overline{EB}=\overline{QB}$ ، $\overline{ED}=\overline{QD}$ ، $\overline{EA}=\overline{QA}$ و $\overline{EC}=\overline{QC}$ است شکل (۱۶-۳)

ثبوت نمائید که:

a- $\overline{EQ}\perp\overline{AC}$

b- $\overline{EQ}\perp\overline{BD}$

c- $\overline{EQ}\perp P$



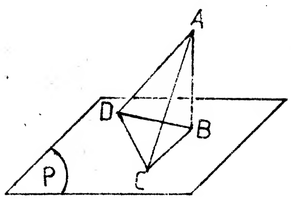
شکل (۱۶-۳)

۴- در شکل (۱۷-۳) اگر $\overline{AB}\perp\overline{BC}$ ، $\overline{DB}\perp\overline{BC}$ و $\overline{BD}=\overline{AB}$ باشد

ثابت نمائید که: $\Delta ABC\cong\Delta DBC$ است.

آیا $\overline{AB}\perp P$ است؟ اگراست چرا؟

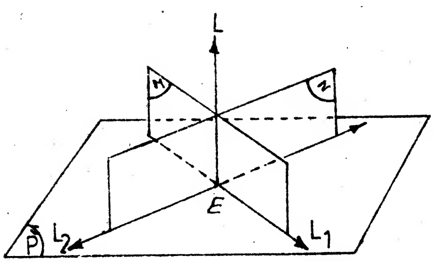
واگر نیست چرا؟



شکل (۱۷-۳)

۵- اگر $\overline{AB}=\overline{CD}$ باشد ویک دیگر را در نقطه M تنصیف نمایند مستقیم L در نقطه M بالای $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ عمودی باشد اگر E یک نقطه L باشد ثبوت نمائید که E از A ، B ، C و D هم فاصله است.

(۵-۳) دعوی:



شکل (۱۸-۳)

ازیک نقطه E مستقیم L تنها یک ستوی P عمود به مستقیم L رسم نموده می توانیم شکل (۱۸-۳).

ثبوت: ۱- فرضاً M و N دوستوی متقاطع است و L فصل مشترک آن ها است.

۲ - یک مستقیم L_1 در مستوی M موجود است که بالای L درنقطه E عمود باشد (بالای یک نقطه یک مستقیم درمستوی یک عمود رسم نموده می توانیم).

۳ - یک مستقیم L_2 درمستوی N موجود است که بالای L درنقطه E عمود باشد (بالای یک نقطه یک مستقیم درمستوی یک عمود رسم نموده می توانیم).

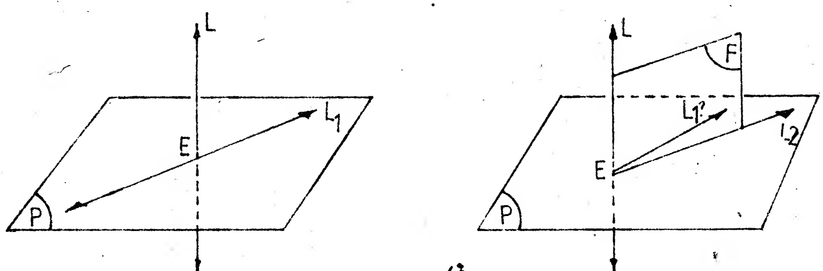
۴ - L_1 و L_2 درنقطه E متقاطع اند وهم درمستوی P واقع می باشند.

۵ - لذا مستوی P بالای مستقیم L ($P \perp L$) عمود است . . . . قدم های 2، 3 ودعوی (۳-۴)

دعوی (۲ - ۳):

اگر یک مستقیم L به روی مستوی P عمود باشد تمام خطوط که درنقطه تقاطع بالای مستقیم L عمود باشند به روی مستوی P واقع می باشند شکل (۱۹-۳).

اگر مستقیم L عمود به مستوی P درنقطه E باشد و مستقیم L_1 عمود بالای مستقیم L در



شکل (۱۹-۳)

نقطه E باشد L_1 درمستوی P واقع است.

ثبوت:

۱- L و L_1 دریک مستوی مانند F واقع اند . . . . . چرا؟

۲- فرضاً تقاطع مستوی های F و P یک مستقیم L_2 است . . . . . چرا؟

۳- $L \perp L_2$ درنقطه E است . . . . تعریف.

۴ - $L \perp L_1$ درنقطه E است . . . . فرضیه .

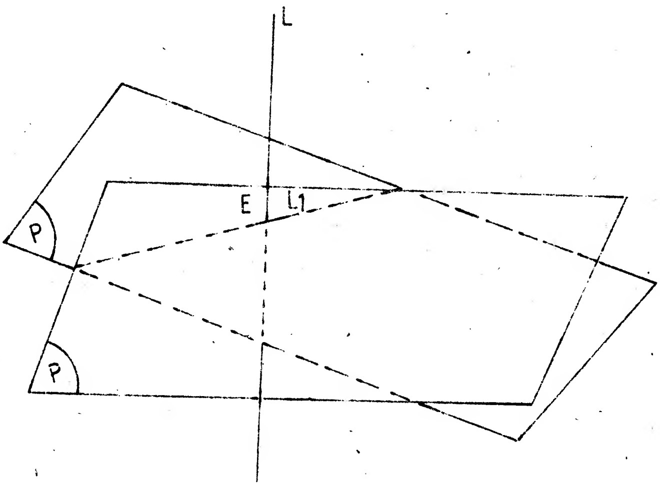
۵ - L_2 و L_1 یک خط اند . . . . . (در یک نقطه یک مستقیم که در یک مستوی واقع باشد تنها یک عمود رسم شده می تواند)

۶ - L_1 در مستوی P واقع است . . . . (بادرنظرداشت قدم 2 ، L_2 در P واقع است وبادرنظرداشت قدم 5 ، L_2 و L_1 عین خط اند)

(۷ـ۳) دعوی :

در یک نقطه یک مستقیم تنها یک مستوی عمود رسم نموده می توانیم وبس شکل (۲۰ - ۳).

ثبوت : اگرمستوی P بالای مستقیم L درنقطه E عمود باشد ومستوی P_1 هم درنقطه E بالای مستقیم L عمود باشد پس تقاطع مستوی P و P_1 یک مستقیم L_1 خواهد بود.



شکل (۲۰ - ۳)

چون تقاطع بین P و P_1 ممکن نیست زیرا تمام خطوط هردو مستوی درنقطه E بالای L عمود می باشند . . . . دعوی (۲ـ ۳)

پس مستوی P_1 و P باهم منطبق بوده وتنها P بالای L عمود است.

(۸ ـ۳) دعوی :

مستوی ناصف عمودی یک مستقیم عبارت از مستوی است که فاصله های هرنقطهٔ آن از دو انجام

مستقیم مساوی باشند .

تفصیل دعوی : اگر مستوی P خط $\overline{AB}$ را در نقطه C طوری قطع کند که $\overline{CA} = \overline{CB}$ باشد .

1- حالاً اگر E یک نقطه مستوی P باشد در این صورت ثبوت باید کرد که $\overline{EA} = \overline{EB}$ است .

2- اگر $\overline{EA} = \overline{EB}$ باشد ثبوت باید نمود که نقطه E در مستوی P واقع است .

ثبوت :

۱- نظر به دعوی عمودیت بین یک مستقیم و یک مستوی و خواص ناصف عمودی یک خط در یک مستوی ،

مثلث های ACE و BCE انطباق پذیر اند یعنی : $\overline{EA} = \overline{EB}$

۲- چون $\overline{EB} = \overline{EA}$ است پس E بالای مستقیم واقع است که ناصف عمودی $\overline{AB}$ باشد .

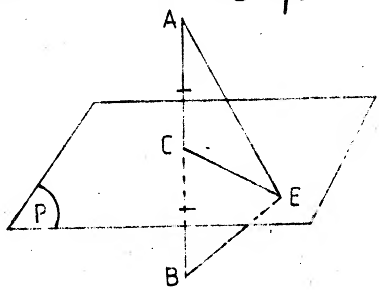
و قرار دعوی (۷ - ۳)

ما میدانیم که $\overline{EC}$ ناصف

عمودی $\overline{AB}$ است

پس در مستوی P واقع

است شکل (۲۱-۳)



شکل (۲۱ -۳)

تمرینات

۱- شعاع $\overrightarrow{AP}$ بالای هریک از

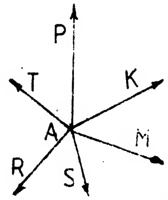
شعاعات $\overrightarrow{AK}$ ، $\overrightarrow{AM}$ ، $\overrightarrow{AS}$ ،

$\overrightarrow{AR}$ و $\overrightarrow{AT}$ عمودی باشد چند مستوی

توسط شعاعات متقاطع فوق تعین

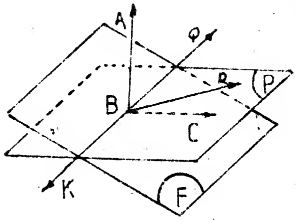
میگردند آیا زیاد تر از سه نقطه شکل مذکور

در یک مستوی واقع است ؟ اگر است چرا ؟ شکل (۲۲ - ۳) .



شکل (۲۲-۳)

۲- مستوی های P و F در امتداد $\overline{KQ}$ متقاطع اند $\overline{AB} \perp P$ است طوریکه B به روی $\overline{KQ}$، R در مستوی P و C در مستوی F واقع است شکل (۲۳-۳)



شکل (۲۳-۳)

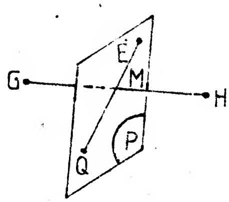
سوالات ذیل را جواب بدهید:

۱- آیا $\overline{AB} \perp \overline{BR}$ است؟ . . . . چرا؟

۲- آیا $\overline{AB} \perp \overline{KQ}$ است؟ . . . . چرا؟

۳- آیا $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ است؟ . . . . چرا؟

۳- در شکل (۲۴-۳) $\overline{GH} \perp P$ در نقطه M است طوریکه $\overline{MG} = \overline{MH}$ و $\overline{EQ} \perp \overline{GH}$ در نقطه M است.

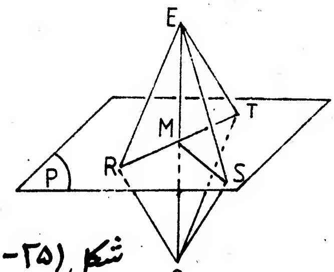


شکل (۲۴-۳)

a- آیا خط $\overline{EQ}$ در مستوی P واقع است؟

b- $\overline{GH}$ با مستوی P چه رابطه دارد؟

۴- مستوی P ناصف عمودی قطعه خط $\overline{EQ}$ است مستوی P خط EQ را در نقطه M قطع می نماید و نقاط T، S و R در مستوی P واقع اند نشان دهید که:



شکل (۲۵-۳)

a- $\overline{ER} =$

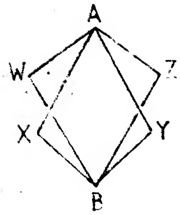
b- $\overline{TQ} =$

c- $\overline{ES} =$

d- $\angle ETM =$

e - $\Delta ETM =$

۴ - آیا $\overline{MT} = \overline{MS} = \overline{MR}$ است توضیح نمائید شکل (۲۵ - ۳) .



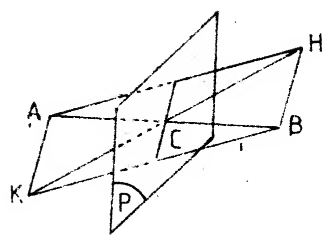
شکل (۲۶ - ۳)

۵ - تمام نقاط شکل (۲۶ - ۳) دریک مستوی واقع نیست .

اگر $\overline{AW} = \overline{BW}$ ، $\overline{AX} = \overline{BX}$ ،

$\overline{Ay} = \overline{By}$ و $\overline{AZ} = \overline{BZ}$ باشد .

ثابت نمائید که W ، X ، y و Z دریک مستوی واقع اند .



شکل (۲۷ - ۳)

۶ - درشکل (۲۷ - ۳) مستوی P ناصف عمودی مستقیم $\overline{AB}$ درنقطه C است نقاط H و B دریک طرف A و K درطرف دیگری مستوی P واقع اند طوریکه نقاط H ، C و K بالای یک مستقیم اند، واگر $\overline{HB} \perp \overline{AB}$ و $\overline{KA} \perp \overline{AB}$ باشد ثبوت نمائید که :

a - $\overline{AK}$ و $\overline{BH}$ درعین مستوی واقع اند .

b - $\overline{AH} = \overline{BK}$

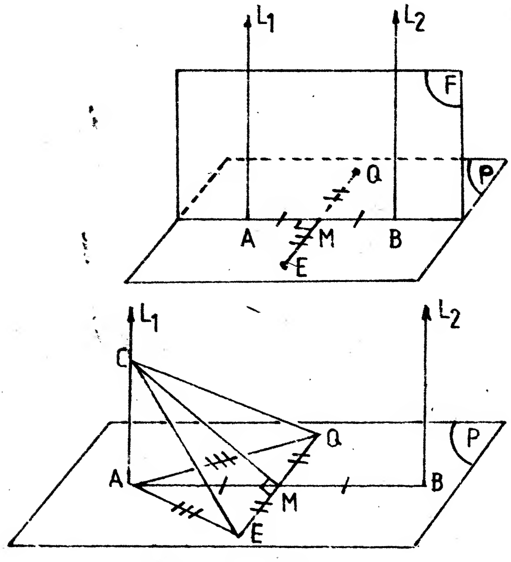
(۹ - ۳) دعوی :

اگر دو مستقیم L_1 و L_2 بالای مستوی P عمود باشند L_1 و L_2 دریک مستوی واقع اند .

ثبوت : اگر L_1 مستوی P را درنقطه A و L_2 مستوی P را درنقطه B عموداً قطع نمایند شکل (۲۸ - ۳) .

A را به B وصل میکنیم قطعه خط $\overline{EQ}$ را طوری رسم می کنیم که $\overline{AB}$ و $\overline{EQ}$ یکدیگر را عموداً تنصیف نمایند حالا ما باید ثابت نمایم که L_1 و L_2 در مستوی F که ناصف عمودی $\overline{EQ}$ است واقع اند.

۱- $\overline{AE} = \overline{AQ}$ . . . . . . (قرار ترسیم $\overline{AB}$ ناصف عمودی $\overline{EQ}$ است).



شکل (۲۸-۳)

۲- $\triangle CAE \cong \triangle CAQ$ زیرا:

a- $\hat{CAE} = \hat{CAQ}$ . . . . 90° اند

b- $\overline{CA} = \overline{CA}$ . . . . $(\overline{CA} = \overline{CA})$

c- $\overline{AE} = \overline{AQ}$ . . . . (قدم اول)

۳- $\overline{CE} = \overline{CQ}$ . . . . (قدم دوم)

۴- نقطه C بالای مستوی ناصف عمودی EQ واقع است.

۵- L_1 در مستوی F واقع است . . . . . قدم های ۱، 2، 3، 4 دعوی (۸-۳).

به عین ترتیب نشان داده می توانیم که L_2 نیز در مستوی F واقع است.

مستوی F که L_1 و L_2 را در بر دارد و در عین زمان ناصف عمودی $\overline{EQ}$ است، پس مستوی مطلوب است.

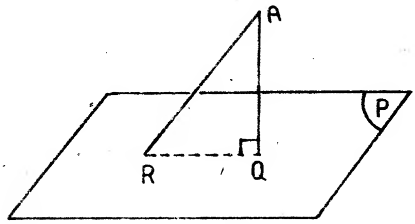
دعوی (۱۰ - ۳):

از یک نقطه A خارج مستوی P، کوتاه ترین فاصله بین مستوی P و نقطه A عبارت از فاصله عمودی است.

ثبوت: از نقطه A عمود AQ و خط مایل AR را رسم می کنیم که مستوی P را در نقاط Q و R

قطع نمایند R را به Q وصل می نمائیم مثلث AQR شامل یک مستوی یک اند.

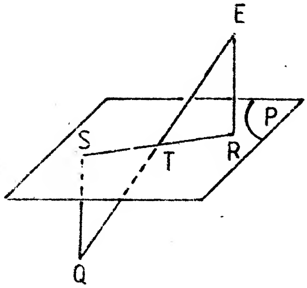
(شما میدانید که در یک مثلث در مقابل زاویه بزرگتر ضلع طویل تر واقع است) چون $\overline{AR}$ مقابل زاویه کلانتر واقع است پس $\overline{AQ}$ کوتاه تر است. شکل (۲۹ - ۳) .



شکل (۲۹ - ۳)

تمرینات

۱- اگر E و Q نقاط متساوی الفاصله ومقابل همدیگر نظر به P واقع باشند عمودهای که از E و Q به مستوی P رسم شود مستوی را در نقاط R و S قطع می کند. شکل (۳۰ - ۳) ثابت نمائید که:



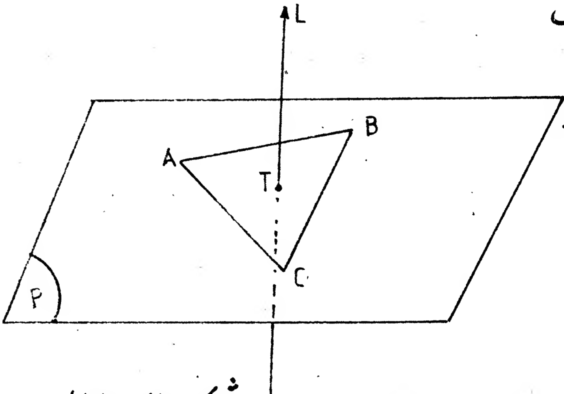
شکل (۳۰ - ۳)

a - مستقیم $\overline{EQ}$ مستقیم $\overline{SR}$ را در نقطه T قطع می نماید.

b - آیا T نقطه تنصیف $\overline{SR}$ است؟

۲- مثلث ABC در مستوی P واقع است واقع است شکل (۳۱ - ۳).

مستقیم L در نقطه T بالای P عمود است وهم نقطه T متساوی الفاصله از A ، B و C است.



شکل (۳۱ - ۳)

اگر X یک نقطه مستقیم L باشد ثابت نمائید که :

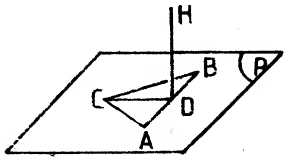
نقطه X متساوی الفاصله از A ، B و C است .

نوت : T نقطه تقاطع ناصف الزاویه ها است .

۳- در شکل (۳۲-۳) مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی الاضلاع است که در مستوی P واقع گردیده است $\overline{CD}$ ناصف الزاویه $\hat{BCA}$ است اگر $\overline{HD}$

عمود بالای $\overline{CD}$ باشد نشان دهید که :

اقلاً یک خطی از شکل ، عمود به روی یکی از مستوی ها است بگوئید که کدام خط به روی کدام مستوی عمود است ؟



شکل (۳۲-۳)

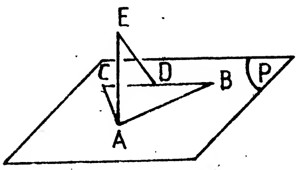
۴- مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ در مستوی P واقع است نقطه E خارج مستوی P است طوریکه :

$\overline{EA} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{EA} \perp \overline{AC}$ و $\overline{ED} \perp \overline{BC}$

می باشد شکل (۳۳-۳) .

کدام یکی از روابط سه گانه ذیل صحت است :

$\overline{EA} < \overline{ED}$ ، $\overline{EA} = \overline{ED}$ ، $\overline{EA} > \overline{ED}$



شکل (۳۳-۳)

۵- مثلث $\overset{\triangle}{HMT}$ در مستوی P واقع است اگر $\overline{TM} = \overline{HM}$ و $\overline{KM} \perp P$ باشد

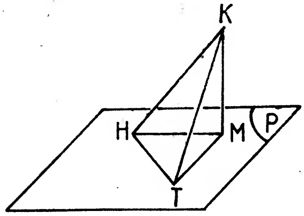
کدام یکی از روابط ذیل صحت است و چرا؟

شکل (۳۴-۳) .

$\hat{KHT} > \hat{KTH}$

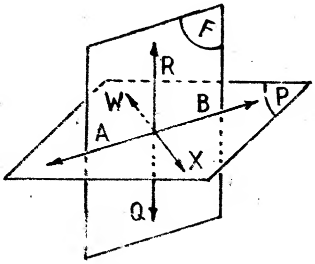
$\hat{KHT} \cong \hat{KTH}$

$\hat{KHT} < \hat{KTH}$



شکل (۳۴-۳)

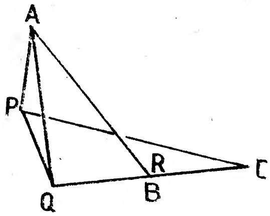
۶- مستوی های P و F در امتداد خط $\overline{AB}$ متقاطع اند طوریکه خطوط RQ در مستوی F و WX در مستوی P واقع است اگر $\overline{RQ} \perp \overline{AB}$ و $\overline{WX} \perp F$ باشد ثابت نمائید که $\overline{RQ} \perp P$ است شکل (۳-۳۵) .



شکل (۳-۳۵)

۷- اگر $\overline{AP} \perp \overline{PQ}$ ، $\overline{AP} \perp \overline{PC}$ و $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$ باشد وهم اگر C ، B و Q بالای یک مستقیم واقع باشند . ثبوت نمائید که $\overline{AQ} \perp \overline{BC}$ است .

کمک : نقطه R را بالای $\overline{BC}$ طوری انتخاب نمائید که $\overline{QR} = \overline{QB}$ باشد شکل (۳-۳۶) .



شکل (۳-۳۶)

پس $a = b$ می باشد .

۲- اگر مقادیر مساوی را با مقادیر مساوی دیگر جمع نمایم حاصل جمع آنها با یک دیگر مساوی خواهد بود مثلاً :

اگر $a = b$ و $c = d$ باشد پس $a + c = b + d$ می باشد .

۳- اگر دو مقدار مساوی را از دو مقدار مساوی دیگر تفریق نمایم باقی مانده با یک دیگر مساوی خواهد بود

مثلاً اگر $a = b$ و $c = d$ باشد پس $a - c = b - d$ می باشد .

(۶ – ۱) **نقطه** : نقطه را بصورت مفهوم ذهنی می شناسیم و به قسم یک اصطلاح اولیه (تعریف ناشده) قبول می کنیم .

(۷ – ۱) **خط مستقیم** : تار کش شده ، کنار میز ، تیغه خط کش مفهوم خط را ارائه می نماید وخط مستقیم را به صورت یک اصطلاح اولیه (تعریف ناشده) قبول می نمایم

اصل اول : هر دو نقطهٔ مشخص تنها و تنها یک خط مستقیم را مشخص می نماید .

اصل دوم : هر خط مستقیم اقلاً دارای دو نقطهٔ مشخص است وحد اقل سه نقطه وجود دارد که بریک خط مستقیم واقع نیستند .

اصل سوم : بین هر دو نقطهٔ مشخص ازیک خط مستقیم می توان نقطه ای مشخص را از آن دو نقطه بدست آورد .

(۸ – ۱) **مستوی** : سطح آب ساکن ، سطح تختهٔ صنف مفهوم مستوی را ارائه می نماید ومستوی را نیز به قسم یک اصطلاح اولیه (تعریف ناشده) قبول می نمایم .

اصل اول : در هر مستوی کم از کم سه نقطه وجود دارد که بالای یک مستقیم واقع نیستند .

اصل دوم : از هر سه نقطه که بالای مستقیم واقع نباشند یک مستوی عبور می کند .

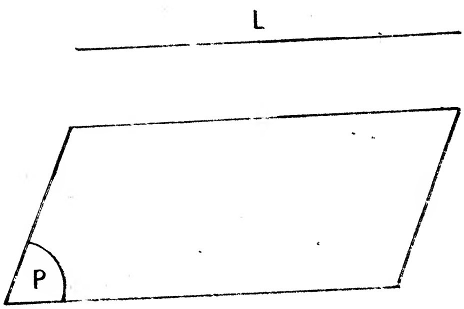
اصل سوم : اگر دو نقطهٔ یک خط مستقیم در یک مستوی واقع باشند خط در همان مستوی واقع است .

فصل چهارم

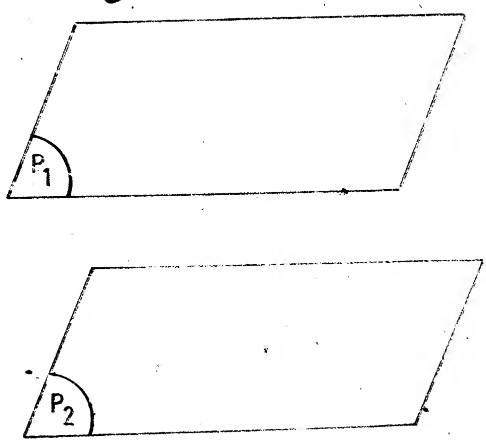
مستوی های متوازی

(۱-۴) تعریف :

دو مستوی بایک دیگر ویایک مستوی بایک مستقیم زمانی متوازی اند که یک دیگر را قطع نه نمایند مانند شکل (۱-۴) و شکل (۲-۴).



شکل (۱-۴)



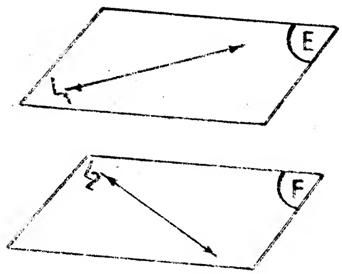
شکل (۲-۴)

مستوی های P_1 و P_2 باهم موازی اند وچنین ارائه می شوند $P_1 \parallel P_2$.

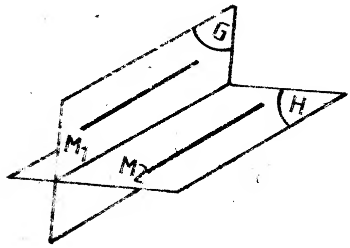
مستقیم L ومستوی P باهم موازی اند وچنین ارائه می شوند $L \parallel P$ و $P \parallel L$.

ارتباطات ومناسبات مستوی های موازی درفضاء مانند ارتباطات ومناسبات خطوط موازی دریک مستوی است یک فرق بارزی که بین مستویات وخطوط موازی درفضا وجود دارد این است که دوخطوط میتوانند نه موازی ونه متقاطع باشند بلکه متنافرهم شده می توانند ولیکن دو مستوی درفضاء یا متقاطع ویا متوازی اند .

دومستوی متقاطع رسم شده می تواند که دوخط موازی درآن ها واقع گردد شکل (۴-۴) . ولیکن در شکل (۳ -۴) دومستوی موازی موجود است که دوخط غیر موازی درآن ها واقع است .



شکل (۳-۴)



شکل (۴-۴)

(۲-۴) دعوی : مستوی P مستوی های $P_1 \parallel P_2$ راقطع می نماید اگر تقاطع P با P_1 به L_1 وتقاطع P را با P_2 به L_2 نشان دهیم ثبوت نمائید که $L_1 \parallel L_2$ است .

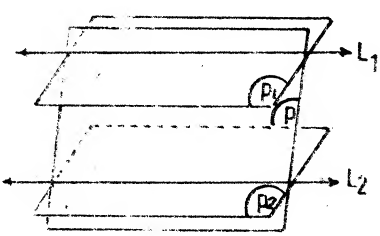
ثبوت :

۱- L_1 و L_2 درمستوی P واقع اند . . . . فرضیه .

۲- L_1 و L_2 کدام نقطه مشترک ندارند . . . . $P_1 \parallel P_2$

۳- پس $L_1 \parallel L_2$ . . . . قدم 1 و 2

شکل (۵ - ۴) .



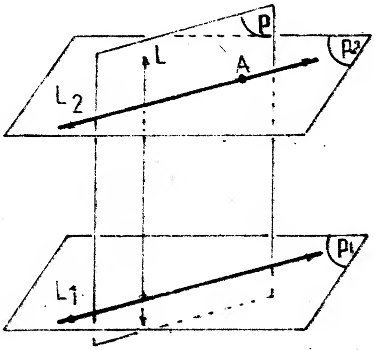
شکل (۵ -۴)

(۴-۳) دعوی:

اگر $P_1 \parallel P_2$ و $L \perp P_1$ باشد ثبوت نمائید که $L \perp P_2$ است شکل (۶-۴).

ثبوت: فرضاً A یک نقطه مستوی P_2 باشد

درصورتیکه A به روی خط L واقع نیست.



شکل (۶-۴)

۱- خط L ونقطه A درمستوی P واقع است.... چرا؟

۲- مستوی P مستوی های P_1 و P_2 را به امتداد مستقیم L_1 و L_2 قطع می کند . . . . چرا؟

۳- $L_2 \parallel L_1$ . . . . دعوی (۲-۴).

۴- $L \perp L_1$ . . . . ($L \perp P_1$) ودعوی (۲-۳).

۵- $L \perp L_2$ . . . قدم 4، 3 وهندسه سطحه.

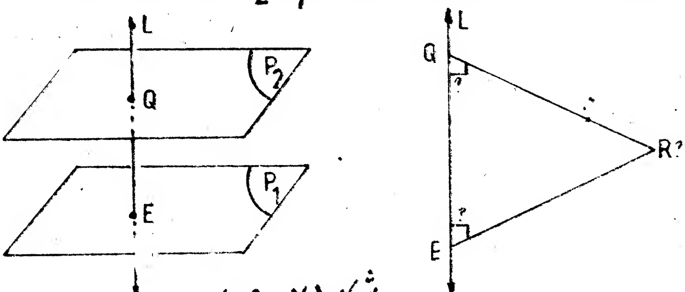
۶- $L \perp P_2$ . . . . قدم 5 ودعوی (۲-۳).

(۴-۴) دعوی:

اگر دو مستوی به عین خط عمود باشند مستوی ها با هم موازی اند.

ثبوت:

فرضاً $P_1 \perp L$ درنقطه E و $L \perp P_2$ درنقطه Q باشد ثبوت می نمائیم که $P_1 \parallel P_2$ است.



شکل (۷-۴)

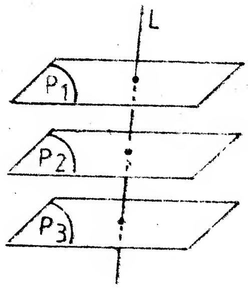
اگر $P_1 \parallel P_2$ نباشد پس اولاً یک دیگر را درنقطه مانند R قطع می نمایند شکل (۷-۴).

الحال $\overline{RE} \perp L$ و $\overline{RQ} \perp L$ است.... زیرا L بالای هر خط P_1 و P_2 درنقاط E و Q عمود می باشد.

می بینیم که $\overline{RQ}$ و $\overline{RE}$ بالای L از یک نقطه R عمودها رسم شده اند ترسیم دوعمود از یک نقطه به روی یک مستقیم ناممکن است لذا : $P_1 \parallel P_2$.

نتیجه : اگر $P_1 \parallel P_3$ و $P_2 \parallel P_3$ باشد ثبوت نمائید که $P_1 \parallel P_2$ است.

شکل (۸ - ۴).



شکل (۸ - ۴)

ثبوت :

۱- $P_1 \parallel P_3$ . . . فرضیه.

۲- $P_2 \parallel P_3$ . . . فرضیه

اگر L عمود به روی P_3 باشد لذا :

۳- $L \perp P_1$ . . . . دعوی (۳ - ۴)

۴- $L \perp P_2$ . . . . دعوی (۳ - ۴)

۵- $P_1 \parallel P_2$ . . . دعوی (۴ - ۴) وقدم های 3 و 4 .

(۵ - ۴) دعوی :

اگر دو خط به عین مستوی عمود باشد باهم موازی اند .

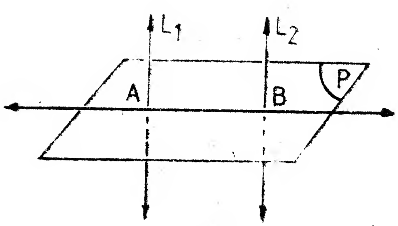
ثبوت : اگر $L_1 \perp P$ در نقطه A و $L_2 \perp P$ در نقطه B باشد شکل (۹ - ۴) .

۱- L_1 و L_2 در یک مستوی واقع اند . . . دعوی (۹ - ۳)

۲- چون $L_1 \perp P$ است پس $L_1 \perp \overline{AB}$ نیز می باشد.

۳- چون $L_2 \perp P$ است پس $L_2 \perp AB$ نیز می باشد.

۴- $L_1 \parallel L_2$ . . . . هندسه سطحه.

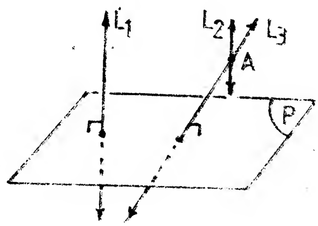


شکل (۹ - ۴)

نتیجه اول : اگر یک ستوی یکی از دو خطوط موازی عمود باشد به روی دیگر آن نیز عمود می باشد - شکل (۱۰-۴) .

توضیح : خطوط $L_2 \parallel L_1$ و $L_1 \perp P$ است

ثبوت می نمایم که $L_2 \perp P$ است.



شکل (۱۰ - ۴)

ثبوت : اگر P بالای L_2 عمود نباشد چنین عمل می نمائیم:

۱- از یک نقطه A خط L_2 خط L_3 را به روی P عمود رسم می کنیم .

۲- $L_1 \parallel L_3$ . . . . دعوی (۵ - ۴) .

۳- L_2 و L_3 عین خط اند $(L_2 = L_3)$ . . . . از یک نقطه محض یک موازی بیک خط رسم کرده می توانیم .

۴- L_3 و L_2 از عین نقطه به روی ستوی P عمود اند پس هر دوی آنها یک خط است .

نتیجه دوم : اگر L_1 و L_2 با L_3 موازی باشند پس $L_1 \parallel L_2$ است .

ثبوت :

۱- $L_1 \parallel L_3$ و $L_2 \parallel L_3$ . . . . قرار فرضیه .

۲- اگر ستوی P را به L_3 عمود رسم نمائیم .

۳- $L_1 \perp P$ و $L_2 \perp P$ . . . . (نتیجه اول) .

۴- $L_1 \parallel L_2$ . . . . دعوی (۵ - ۴) .

دعوی (۶ - ۴) :

ستوی های موازی در هر نقطه متساوی الفاصله اند شکل (۱۱ - ۴) .

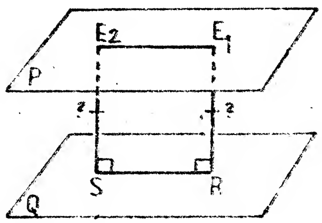
ثبوت : فرضاً E_1 و E_2 دو نقطه ستوی P باشد خطوط $\overline{E_1R}$ و $\overline{E_2S}$ از نقاط

E_1 و E_2 به روی مستوی Q عمود رسم شده باشند پس داریم که :

۱- $\overline{E_1R} \parallel \overline{E_2S}$ . . . . دعوی (۵-۴) .

۲- E_1، E_2، R و S در یک مستوی واقع اند

. . . . (بالای دو خط موازی واقع اند).



شکل (۱۱-۴)

۳- $\overline{E_1E_2} \parallel \overline{RS}$ . . . تعریف (۱ - ۴)

۴- شکل E_1E_2RS متوازی الاضلاع است

. . . . قدم های 1 ، 2 و 3

۵- $\overline{E_1R} = \overline{E_2S}$ . . . . اضلاع مقابل متوازی الاضلاع

تمرینات

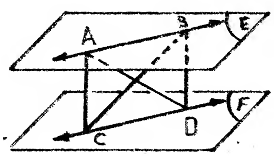
۱- مستوی های E و F باهم موازی اند خط $\overline{AB}$ در مستوی E و $\overline{CD}$ در مستوی F واقع است طوریکه $\overline{AC} \perp F$ و

$\overline{BD} \perp F$ می باشد ثبوت

نمائید که $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$

یک دیگر را تنصیف

هم می نمایند. شکل (۱۲-۴)



شکل (۱۲-۴)

۲- نقاط A ، B و C در مستوی G و نقاط D ، E و F در مستوی H واقع اند طوریکه $\overline{AD} \perp G$ و $\overline{AD} \perp H$ می باشد علاوتاً $\overline{AB} = \overline{DF}$ است کدام یکی از روابط ذیل صحت دارد :

شکل (۱۳-۴) .

a- $\overline{AF} = \overline{BD}$ ، b- $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$

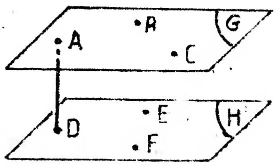
c- $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ ، d- $G \parallel H$

e- $\overline{AC} \perp \overline{AD}$ ،

f- $\angle AFD \cong \angle DBA$

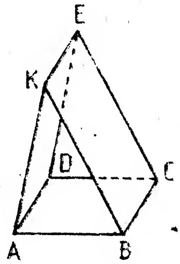
g- $\overline{AC} \parallel \overline{DF}$

h- $\overline{AF}$ و $\overline{BD}$ یک دیگر را تنصیف می‌کنند.



شکل (۱۳-۴)

۳- در شکل (۱۴-۴) ABCD، ADEK و BCEK هر سه متوازی الاضلاع اند ثبوت نمائید که:

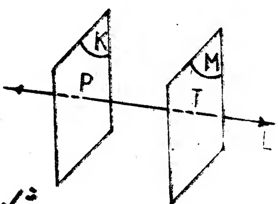


شکل (۱۴-۴)

a- $\overline{BC} \parallel \overline{AD} \parallel \overline{EK}$ است.

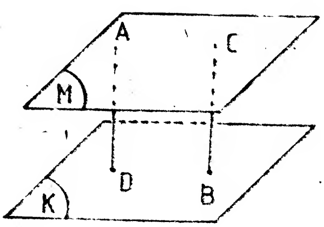
b- $\angle KAB \cong \angle EDC$ است

۴- در شکل (۱۵-۴) مستوی $K \perp L$ درنقطه P و مستوی $M \perp L$ درنقطه T است مستویات M و K باهم چه ارتباط دارند وچرا؟



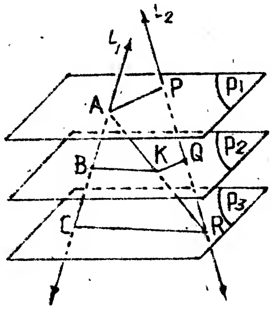
شکل (۱۵-۴)

۵- مستوی‌های M و K باهم موازی اند نقاط A و C بالای مستوی M ونقاط B و D به روی مستوی K قرار دارند طوریکه $\overline{AD} \perp K$ و $\overline{BC} \perp M$ باشد ثبوت کنید که $\overline{AB} = \overline{CD}$ است شکل (۱۶-۴).



شکل (۱۶-۴)

۶- درشکل (۱۷-۴) خطوط کیفی L_1 و L_2 مستوی های موازی P_1 ، P_2 و P_3 قطع می کنند و خط $\overline{AR}$ مستوی P_2 را در K قطع می نماید اگر $\overline{AB}=\overline{BC}$ باشد ثبوت کنید که $\overline{PQ}=\overline{QR}$ می باشد



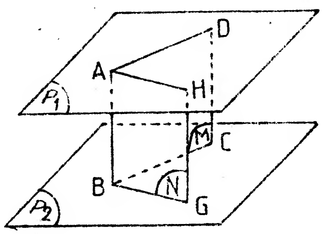
شکل (۱۷-۴)

۷- درشکل (۱۷-۴) ثابت نمائید که:

$$\overline{BQ} < \frac{1}{2}(\overline{AP}+\overline{CR})$$

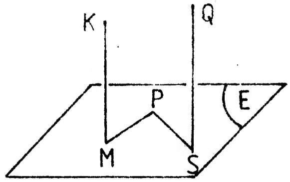
۸- درشکل (۱۸-۴) مستویات M و N یک دیگر خود را به امتداد $\overleftrightarrow{AB}$ قطع می کنند و هم مستوی های M و N مستویات موازی P_1 و P_2 را به امتداد $\overleftrightarrow{AD}$، $\overleftrightarrow{BC}$، $\overleftrightarrow{AH}$ و $\overleftrightarrow{BG}$ قطع می نماید اگر $\overline{AD}=\overline{BC}$ و $\overline{AH}=\overline{BG}$ باشد ثابت نمائید که:

$\angle DAH \cong \angle CBG$ است



شکل (۱۸-۴)

۹- $\overline{PM}$ و $\overline{PS}$ درمستوی E واقع اند P ، M و S به روی یک مستقیم واقع نیستند اگر $\overline{KM}\perp\overline{PM}$ ، $\overline{QS}\perp\overline{PS}$ و $\overline{KM}\parallel\overline{QS}$ باشد ثبوت نمائید که $\overline{KM}\perp E$ و $\overline{QS}\perp E$ می باشد شکل (۱۹-۴).

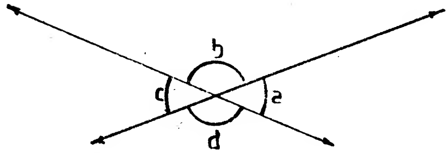


شکل (۱۹-۴)

کمک، موازی دیگری را رسم نمائید.

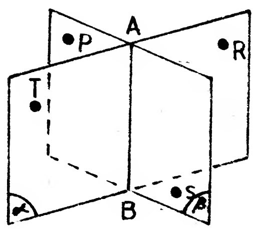
(۷-۴) زاویه دو وجهی یا فرجه:

اگر دو مستقیم باهم قطع نمایند چار زاویه تشکیل میگردد مانند شکل (۲۰-۴).

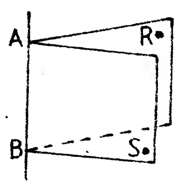


شکل (۲۰-۴)

اگر دو مستوی در فضا، یک دیگر را قطع نمایند چار شکل را بوجود می آورند که هریکی از چار شکل را زاویه دو وجهی یا فرجه نامند مانند شکل (۲۱-۴). مستوی های α و β یک دیگر را به امتداد خط $\overline{AB}$ قطع مینمایند که چار زاویه دو وجهی یا فرجه های ذیل تشکیل میدهند



شکل (۲۱-۴)



شکل (۲۲-۴)

$\angle(T - \overline{AB} - S)$

$\angle(S - \overline{AB} - R)$

$\angle(R - \overline{AB} - P)$

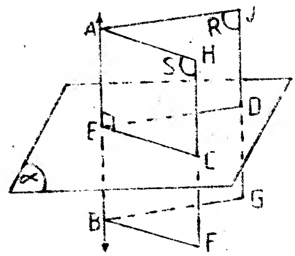
$\angle(P - \overline{AB} - T)$

$\overline{AB}$ عبارت از فصل مشترک ویا خط الرأس زاویه دو وجهی است ومستوی های R و S را وجوه ویا اضلاع دو وجهی (فرجه) $\angle(R - AB - S)$ نامند مانند شکل (۲۲-۴).

هر زاویه دو وجهی یا فرجه قیمت های از 0° الی 180° را اخذ نموده می توانند.

(۸-۴) زاویه مسطحه یک دو وجهی:

زاویه مسطحه یک دو وجهی زاویه را گویند که از اثر تقاطع یک مستوی عمود به فصل مشترک ویا خط الرأس زاویه دو وجهی حاصل می شود مثلاً در شکل (۲۳-۴) مستوی α، عمود به فصل مشترک



شکل (۴-۲۳)

و باخط الرأس $\overline{AB}$ نیم مستوی های R و S رسم گردیده است زاویه دو وجهی $\langle(C-AB-D)$ ویا $\angle DEC$ را تشکیل میدهد و زاویه $D\hat{E}C$ در مستوی α واقع گردیده است

وهم در شکل (۴-۲۳) ارتباط ذیل صحت دارد.

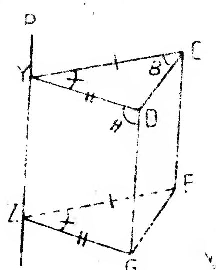
$$J\hat{A}H = D\hat{E}C = G\hat{B}F$$

(۹-۴) دعوی :

تمام زوایای سطحه یک زاویه دو وجهی یا فرجه باهم مساوی اند

ثبوت : دو زاویه سطحه $C\hat{y}D$ و $F\hat{Z}G$ واقع در دو وجهی $\angle A-PQ-B$ که رأس آن ها y و Z است داده شده است مستوی های که زوایای $C\hat{y}D$ و $\hat{F}ZG$ در آن واقع است باهم موازی اند زیرا هردو مستوی بالای PQ عموداند

. . . قرار تعریف فرجه



شکل (۴-۲۴)

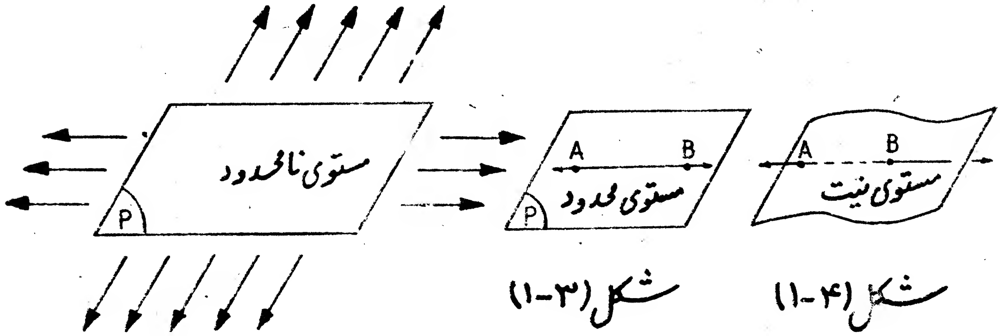
الحال نقاط C ، D ، F و G را بالای اضلاع زوایای سطحه طوری انتخاب مینمایم که $\overline{yD} = \overline{ZG}$ و $\overline{yC} = \overline{ZF}$ باشد باملاحظه شکل (۴-۲۴) داریم که ؛

۱- شکل yCFZ یک متوازی الاضلاع است . . . . $\overline{yC} = \overline{FZ}$ و $\overline{yC} \parallel \overline{FZ}$ است

. . . . زیرا هردو در یک مستوی واقع وعمود به yZ اند .

۲- yDGZ نیز یک متوازی الاضلاع است . . . . ($\overline{yD} = \overline{ZG}$ و $DG \parallel yZ$).

اشکال (۳-۱) و (۴-۱) را ملاحظه نمائید شکل (۳-۱) یک مستوی را نمایش میدهد ولی شکل (۴-۱) یک مستوی را نمایش نمیدهد در عمل یک مستوی را توسط یک مستطیل و یا متوازی الاضلاع نمایش میدهند که در یک کنج آن یک حرف را می نویسند .

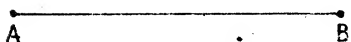


شکل (۳-۱)   شکل (۴-۱)

(۹-۱) فضاء :

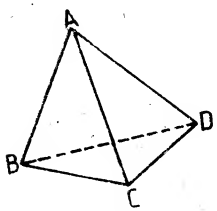
فضاء را نیز یک اصطلاح اولیه (تعریف ناشده) قبول می نمائیم .

اصل اول : فضاء مجموعه لایتناهی از نقاط است .

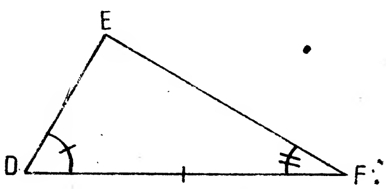


شکل (۵-۱)

اصل دوم : کم از کم چار نقطه از فضاء وجود دارند که در یک مستوی واقع نیست



شکل (۷-۱)

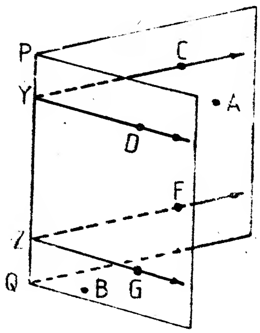


شکل (۶-۱)

(۱۰-۱) شکل :

هر مجموعه از نقاط را شکل نامند مثلاً خط $\overline{AB}$، مثلث $\overset{\Delta}{EDF}$ و هرم ABCD در اشکال (۵-۱)، (۶-۱) و (۷-۱) نمونه از اشکال اند .

اگر تمام نقاط یک خط در یک مستوی واقع باشد آنرا یک شکل سطح (مستوی) می نامند



شکل (۴-۲۴)

پس داریم که :

۳- $\overline{CF} \parallel \overline{DG}$ . . . . هر دو موازی به $\overline{YZ}$ اند

۴- $\overline{CF} = \overline{DG}$ . . . . $\overline{DG} = \overline{YZ} = \overline{CF}$

۵- DGFC یک متوازی الاضلاع است زیرا $\overline{CF} \underline{\parallel} \overline{DG}$

۶- $\overline{GF} = \overline{DC}$ . . . . چرا؟

مثلث های $\overset{\triangle}{CYD}$ و $\overset{\triangle}{FZG}$ انطباق پذیراند

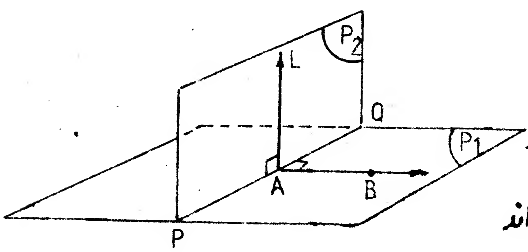
.... زیرا هر سه ضلع آن ها باهم مساوی است .

لذا $\angle CYD \cong \angle FZG$

(۱۰-۴) دعوی :

اگر مستقیم L به مستوی P_1 عمود باشد هر مستوی P_2 که خط L در آن واقع باشد بالای مستوی P_1 عمود میباشد

ثبوت :



شکل (۴-۲۵)

فرضاً $\overline{PQ}$ فصل مشترک P_1

و P_2 است. اگر $\overline{AB}$ در نقطه A تقاطع L

با $\overline{PQ}$ عمود رسم گردد. $\overline{AB} \perp L$ است

زیرا $\overline{AB}$ و L در نقطه A بالای $\overline{PQ}$ عموداند

:

خط $\overline{AB}$ به روی مستوی P_2 عمود است چون $L \perp P_1$ است . . . . قرار متن دعوی .

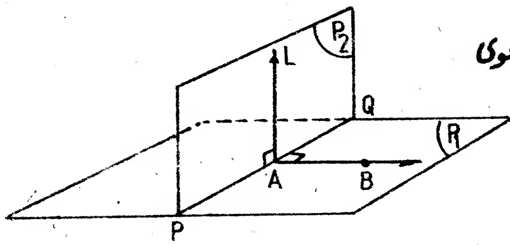
پس $\angle(P_1 - \overline{PQ} - P_2) = \angle LAB = 90°$

لذا $P_1 \perp P_2$ است شکل (۴-۲۵).

(۱۱ - ۴) دعوی :

اگر دو مستوی متعامد باشند مستقیم واقع به یکی از مستوی ها و عمود بر فصل مشترک آن ها به مستوی دیگر نیز عمود می باشد .

ثبوت : قرار شکل (۲۶-۴) :



شکل (۲۶-۴)

۱- $L \perp \overline{PQ}$ در نقطه A است . . . . قرار دعوی

۲- $P_1 \perp P_2$ . . . . قرار دعوی .

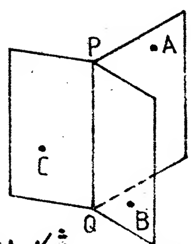
ثابت می نمایم که $L \perp P_1$ می باشد .

۳- $\overline{AB}$ را بالای $\overline{PQ}$ در نقطه A عمود رسم می نمائیم

۴- $L \perp \overline{AB}$ . . . . زیرا $L \perp \overline{PQ}$ پس $\overline{AB} \perp \overline{PQ}$

۵- $L \perp P_1$ . . . . قدم چهار و دعوی (۱۰ - ۴) .

تمرینات

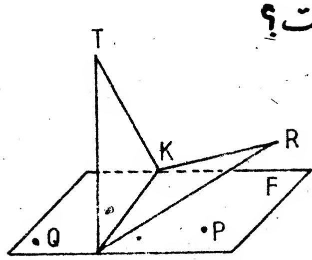


شکل (۲۷ - ۴)

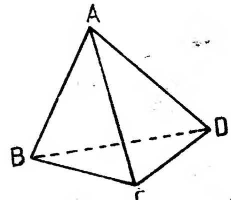
۱- تمام فرجه های شکل (۲۷ - ۴) را نام ببرید؟

۲- تمام فرجه های (۲۸ - ۴) را نام ببرید که زیاده تر از سه اند ؟

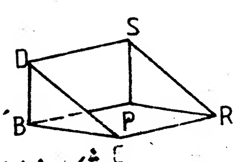
۳- نام شش زاویه دو وجهی (فرجه) در شکل (۲۹ - ۴) چیست ؟



شکل (۲۸ - ۴)



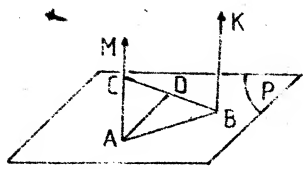
شکل (۲۹ - ۴)



شکل (۳۰ - ۴)

۴- مستوی های BCD و PRS عمود بالای $\overline{BP}$ می باشند و هم $\overline{DB} = \overline{SP}$ و $\overline{BC} = \overline{PR}$ است ثبوت کنید که $\overline{DC} = \overline{SR}$ است شکل (۳۰-۴)

۵- در شکل (۳۱-۴) خطوط $\overline{AM}$ و $\overline{BK}$ موازی اند و $\overline{BK} \perp P$ است D نقطه تنصیف $\overline{BC}$ است طوریکه $\overline{AC} = \overline{AD}$ است اندازه هر زاویه شکل را دریافت نمائید.



شکل (۳۱-۴)

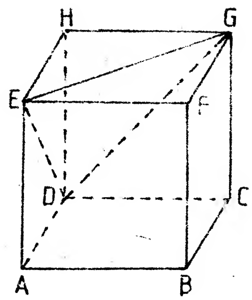
۶- مکعبی مطابق شکل (۳۲-۴) داده شده است اندازه زوایای ذیل را مقابل آنها بنویسید:

1- $\angle DHE =$

2- $\angle HGD =$

3- $\angle DEH =$

4- $\angle EGD =$



شکل (۳۲-۴)

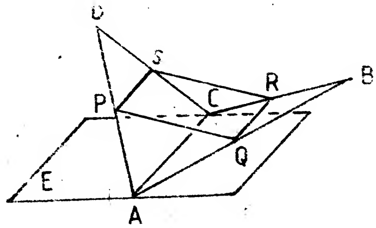
کمک:

۱- دوازده خط الرأس مکعب باهم مساوی اند (خط الرأس های سطح فوقانی شکل (۳۲-۴) عبارت انداز $\overline{FG}$، $\overline{GH}$، $\overline{HE}$ و $\overline{EF}$ می باشد).

۲- خط الرأس های متقاطع باهم عمود اند.

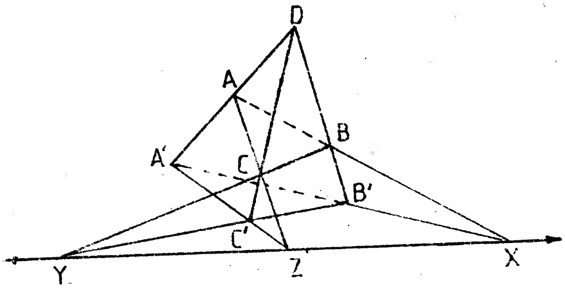
۷- A، B، C و D چار نقطه است که در یک مستوی واقع نمی باشند سه نقطه آن بالای یک مستقیم نیز واقع نمی باشند از اتحاد $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$ و $\overline{DA}$ یک چارضلعی کیفی حاصل می شود نشان دهید که شکل PQRS که از وصل نمودن نقاط تنصیف اضلاع متعاقب حاصل می شود

متوازی الاضلاع است شکل (۳۳-۴)



شکل (۳۳-۴)

۸- مطابق شکل (۳۴-۴) مثلث های ABC و $A'B'C'$ در مستویات غیر موازی واقع اند طوریکه AA'، BB' و CC' باهم در نقطه D متقاطع اند اگر AB و $A'B'$ در نقطه x و BC و $B'C'$ درنقطه y و AC و $A'C'$ در نقطه Z تقاطع نمایند ثبوت نمائید که x، y و Z بالای یک خط مستقیم واقع اند.



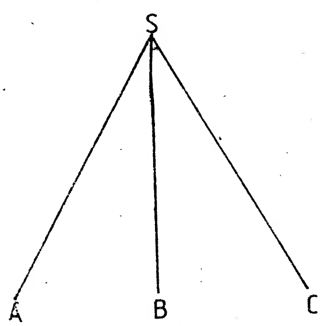
شکل (۳۴-۴)

نوت: سوال ۸ محض برای شاگردان ممتاز است.

(a-۱۲-۴) سه وجهی ها:

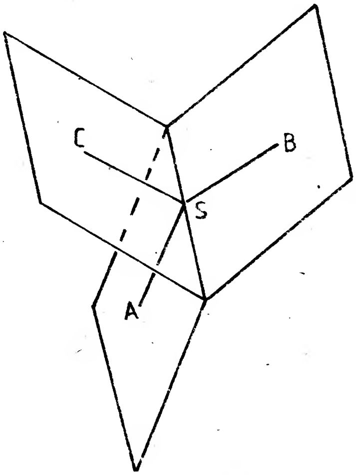
سه وجهی شکل را می نامند که توسط سه خط مستقیم که سه به سه در یک مستوی واقع نباشند تشکیل شده باشد.

مبداء مشترک S سه مستقیم $\overline{SA}$، $\overline{SB}$ و $\overline{SC}$ را رأس سه وجهی دیا کنج سه وجهی $S-ABC$ می گویند و مستقیم های $\overline{SA}$، $\overline{SB}$ و $\overline{SC}$ را خط الرأس سه وجهی نامند شکل (a ۳۵-۴).



شکل (a ۳۵-۴)

(b-۱۲-۴) سه وجهی قایم:

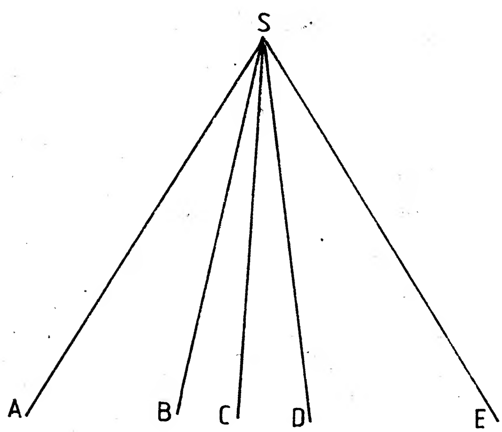


یک سه وجهی را درصورت قایم مینامند که زوایای هرسه وجه آن قایم باشند جهت ترسیم سه وجهی قایم چنین عمل می نمائیم اولاً یک زاویه قایمه $\widehat{ASB}$ را رسم می نمائیم وبعداً درنقطه S عمود $\overline{SC}$ را رسم می کنیم شکل حاصله سه وجهی قایم می باشد شکل (۴-۳۵b).

شکل (۴-۳۵b)

(C-۱۲-۴) کنج ویازاویه جامده:

شکل حاصل ازچند قطعه خط مستقیم که سه به سه دریک مستوی واقع نباشند کنج یا زاویه جامده نامیده می شود مبداء S را رأس زاویه جامده S_ABCDE می نامند قطعه خط های $\overline{SA}$، $\overline{SB}$، $\overline{SC}$، $\overline{SD}$ و $\overline{SE}$ را اضلاع زاویه جامده می نامم

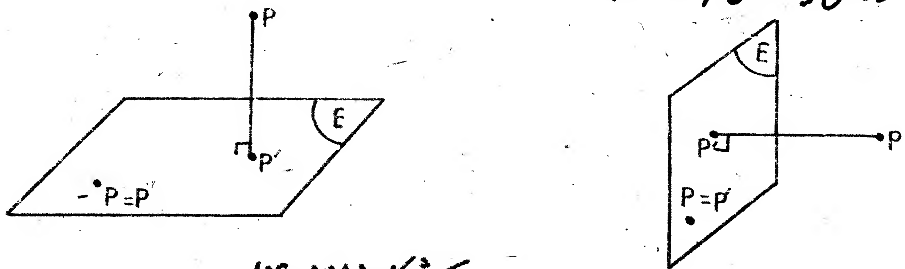


یک چندوجهی را محدب نامند درصورتیکه تمام چند وجهی بیک جانب مستوی هریک از وجوه آن واقع گردد ودرغیرآن چندوجهی را مقعر نامند شکل (۴-۳۵C).

شکل (۴-۳۵C)

(۱۲-۴) ارتسام :

ارتسام قایم یک نقطه بالای یک مستوی عبارت از انجام پایه عمود است که از نقطه به مستوی فرود می آید اشکال (۳۵-۴) .

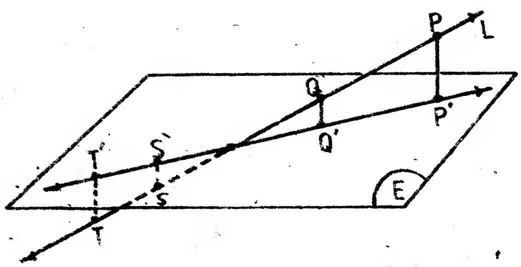


شکل (۳۵-۴)

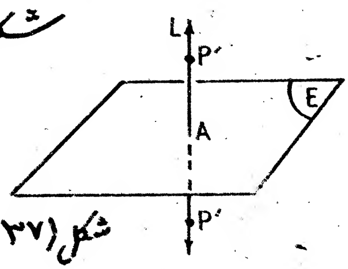
نظر به دعوی (۱۰-۴) تنها و تنها یک عمود از یک نقطه خارج مستوی به مستوی رسم نموده می توانیم و P' عبارت از مرتسم P است .

تعریف : ارتسام قایم یک خط به روی یک مستوی عبارت از ست نقاط مختلف مستوی است که از تمام نقاط خط عمود آن به روی مستوی رسم گردد .

در شکل (۳۶-۴) نقطه P' عبارت از مرتسم P و Q' عبارت از مرتسم Q و S' مرتسم S وغیره می باشد مرتسم یک خط مستقیم بالای یک مستوی عبارت از یک خط مستقیم میباشد اما درصورتیکه خط مستقیم بالای مستوی عمود باشد مرتسم آن عبارت از یک نقطه است شکل (۳۷-۴) .



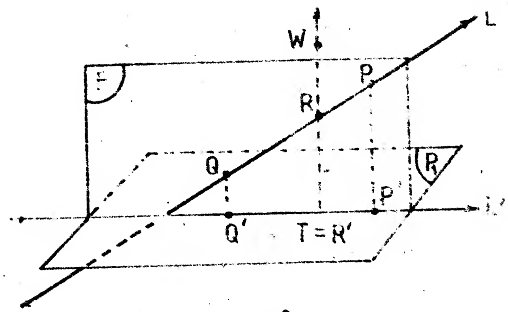
شکل (۳۶-۴)



شکل (۳۷-۴)

(۱۳-۴) دعوی :

اگر یک خط مستقیم L بالای مستوی P_1 عمود نباشد ارتسام خط مذکور بالای مستوی P_1 عبارت از خط مستقیم $\acute{L}$ است .



شکل (۳۸-۴)

ثبوت : فرضاً P و Q دو نقطه خط مستقیم L باشد و $\acute{P}$ و $\acute{Q}$ مرتسم آن ها بالای P_1 باشد $\acute{P}$ و $\acute{Q}$ باهم منطبق نمی باشند زیرا P و Q باهم منطبق نمی باشند .

$\overline{P\acute{P}}$ و $\overline{Q\acute{Q}}$ در یک مستوی واقع اند (زیرا هر دوی آن ها بالای عین مستوی عمود بوده و متوازی اند) شکل (۳۸-۴) .

فرضاً F مستوی است که $\overline{P\acute{P}}$ و $\overline{Q\acute{Q}}$ در آن واقع اند و $\acute{L}$ تقاطع مستوی های F و P_1 است میدانیم که L در مستوی F واقع است زیرا دو نقطه ها در F وجود دارد .

الحال می خواهیم بدانیم که $\acute{L}$ مرتسم L نیز در مستوی P_1 واقع است چون $\acute{P}$ و $\acute{Q}$ در مستوی P_1 واقع اند لذا خط $\acute{L}$ هم در مستوی P_1 واقع می باشد .

(۱۴-۴) دعوی :

دریافت طول مرتسم یک قطعه خط به روی مستوی :

الف : مستقیم AB به روی مستوی P عمود نبوده و موازی به مستوی P هم نمیباشد از دو انجام قطعه خط $\overline{AB}$، عمودهای $\overline{A\acute{A}}$ و $\overline{B\acute{B}}$ را به روی P رسم نموده از نقطه A عمودی AC را به روی قطعه $\overline{B\acute{B}}$ رسم می نمائیم .

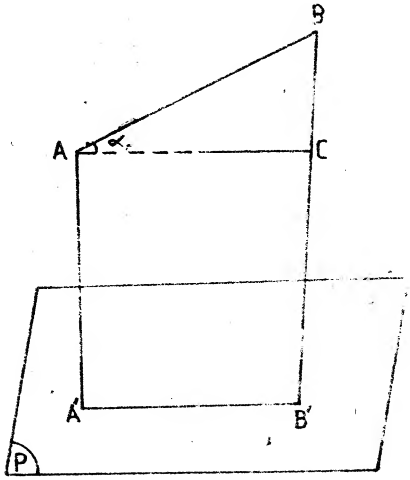
ثبوت : شکل $AC\acute{A}\acute{B}$ یک مستطیل است لذا $\overline{AC} = \overline{\acute{A}\acute{B}} \ldots (I)$

مثلث $\overset{\Delta}{ACB}$ قایم الزاویه است لذا

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \dots (II)$$

ویا

$$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \cos\alpha \dots (III)$$



شکل (۴-۳۹)

ازروابط I و III داریم که:

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\alpha$$

تبصره:

I - اگر $\hat{\alpha} = 0°$ باشد دراین صورت $\overline{AB}$ موازی ومساوی $\overline{A'B'}$ میباشد

زیرا: ... $\overline{A'B'} = \overline{AB}\cdot\cos 0°$ چون $\cos 0° = 1$ است.

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}$$

اگر $\overline{AB}$ موازی به مستوی P باشد دراین صورت مرتسم $\overline{AB}$ مساوی به طول خودش است.

II - اگر $\hat{\alpha} = 90°$ باشد دراین صورت $\overline{AB}$ عمود به روی مستوی P می باشد زیرا:

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos 90°$$

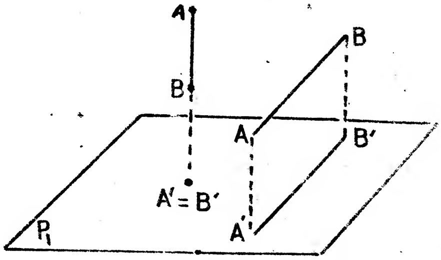
چون $\cos 90° = 0$

$$\therefore \overline{A'B'} = 0$$

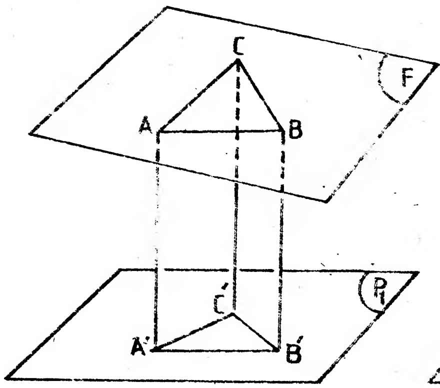
ازرابطه اخیرالذکر دیده می شود که طول $\overline{A'B'} = 0$ است یعنی مرتسم $\overline{AB}$ به روی P عبارت ازیک نقطه است.

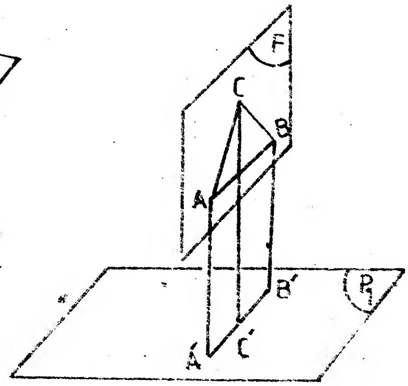
تعریف: اگر A یک نقطه درفضا و P_1 یک مستوی باشد مرتسم A بالای P_1 عبارت از A' می باشد مرتسم قطعه خط $\overline{AB}$ عبارت ازیک قطعه خط $\overline{A'B'}$ می باشد مرتسم یک قطعه خط $\overline{AB}$

یک نقطه هم شده می تواند مانند شکل (۳۹-۴) و هم مرتسم یک مثلث عبارت از یک مثلث و یا یک قطعه خط می باشد. شکل (۴۰-۴) و شکل (۴۱-۴).



شکل (۳۹-۴)

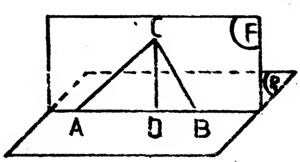




شکل (۴۰-۴) شکل (۴۱-۴)

تمرینات

۱- در شکل (۴۲-۴) مستوی P_1 بالای مستوی F عمود است و فصل مشترک آنها $\overline{AB}$ است نقطه C در مستوی F واقع است و $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ است مرتسم $\overline{AC}$، $\overline{BC}$ و مثلث $\hat{ABC}$ به روی P_1 چیست؟

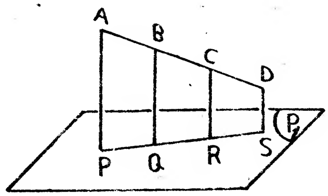


شکل (۴۲-۴)

۲- در شکل (۴۳-۴) نقاط P، Q، R، و S مرتسم A، B، C و D در مستوی P_1 است اگر B و C خط $\overline{AD}$

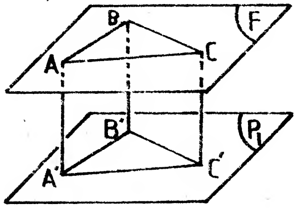
را به سه حصه مساوی تقسیم نماید

چرا R و Q خط $\overline{PS}$ را به سه حصه مساوی تقسیم می نماید؟



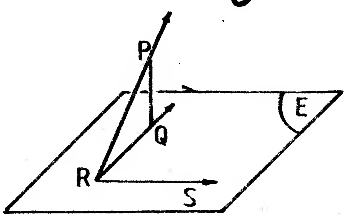
شکل (۴-۴۳)

۳- دو مستوی موازی P_1 و F داده شده است مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ در مستوی F واقع است ثبوت نمائید که: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ است درصورتیکه A'، B' و C' مرتسم قایم A، B و C بالای مستوی P_1 است شکل (۴-۴۴).



شکل (۴-۴۴)

۴- $\overline{RS}$ در مستوی E واقع است و $\angle PRS$ یک زاویه قایمه است وهم Q مرتسم P می باشد ثبوت کنید که $\angle QRS = 90^\circ$ است.

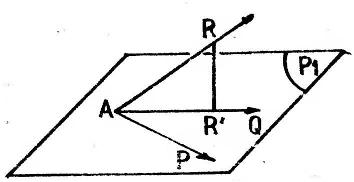


شکل (۴-۴۵)

کمک: در نقطه R عمود $\overline{RT}$ را بالای مستوی E رسم نمائید شکل (۴-۴۵).

۵- اگر $\overline{AQ}$ مرتسم $\overline{AR}$ به روی مستوی P_1 باشد $\overline{AP}$ یک خط مستقیم از نقطه A در مستوی P_1 رسم شده است ثبوت نمائید که:

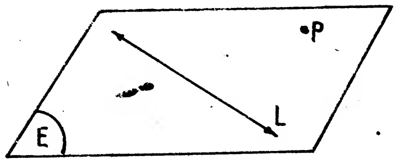
$$\hat{QAR} < \hat{PAR}$$



شکل (۴-۴۶)

کمک: بالای AP یک نقطه K را انتخاب نمائید طوریکه $\overline{AK} = \overline{AR}$ باشد

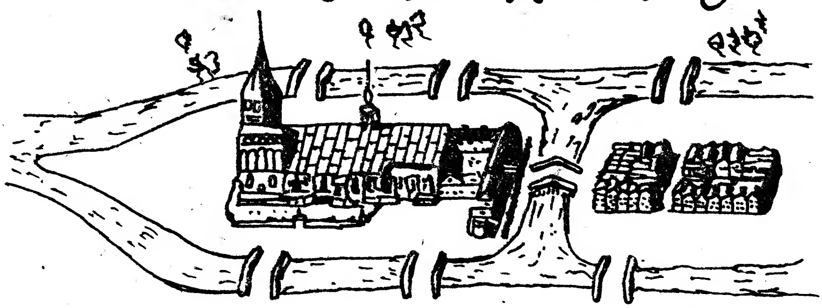
ازین به بعد هر شکل هندسی را با اختصار شکل می نامیم شکل (۸ - ۱)



شکل (۸-۱)

(۱۱ - ۱) سطح :

سطح از مفاهیم اساسی هندسه است و معمولاً سرحد بین هر جسم فزیکی و فضاء و یا قسمتی از آنرا سطح می نامند مثلاً، سطح میز، دیوار، توپ و غیره . شکل (۹-۱)



شکل (۹-۱)

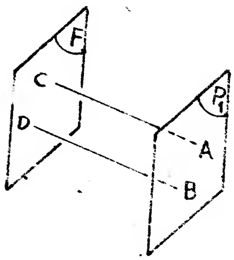
(۱۲ - ۱) خط و مستوی در فضاء سه بعدی :

فضاء سه بعدی به فضای که در آن زنده گانی می نمائیم فضای سه بعدی است . فضاء سه بعدی یکی از مفاهیم اولیه (تعریف ناشده) می باشد .

فضاء مجموعه ای از بی نهایت نقاط می باشد خط و مستوی نیز که بالترتیب دارای یک بعد و دو بعدی باشند هر یک جزء از ست فضاء می باشد . اشکال (۱۰ - ۱) ، (۱۱ - ۱) و (۱۲ - ۱)

شکل (۱۰-۱)

خطوط $\overline{KR}$ و $\overline{K'R'}$ را رسم نمائید شکل (۴-۴٦).



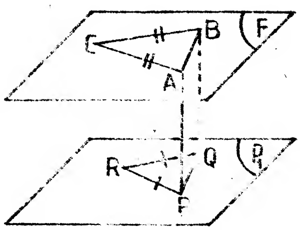
شکل (۴-۴۷)

٦- اگر $\overline{AC} \perp P_1$ ، $\overline{AC} \perp F$ و $\overline{BD} \perp F$ باشد ثبوت نمائید که:

$\overline{BD} \perp P_1$ و $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ است

شکل (۴-۴۷).

۷- شکل (۴-۴۸) داده شده طوریکه مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ درمستوی F و $\overset{\triangle}{PQR}$ درمستوی P_1، ABQP یک مستطیل و $\overline{AP} \perp P_1$ باشد کدام یکی از جملات ذیل صحت است:



شکل (۴-۴۸).

a- $\overline{BQ} \perp P_1$

b- $\overline{AQ} = \overline{BP}$

c- $F \parallel P_1$

d- $\overline{PQ}$ مرتسم $\overline{AB}$ درمستوی P_1 است

e- $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

f- $\overline{PC} = \overline{QC}$

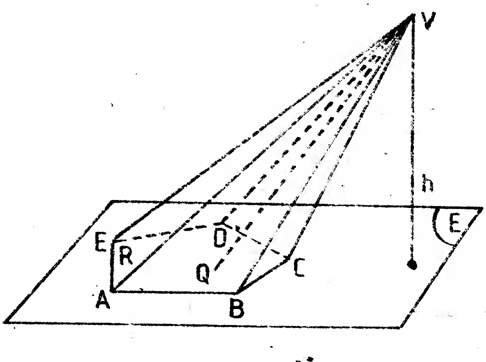
g- $\overline{BC} \parallel \overline{RQ}$

h- $\triangle PAC \cong \triangle RBC$

فصل پنجم

هرم

هرم باقاعده R و رأس V عبارت از جسم است که در شکل (۱ - ۵) نشان داده شده است قاعده هرم را یک چند ضلعی (مثلث ، چارضلعی، پنج ضلعی ، شش ضلعی . . .) تشکیل میدهد و رأس هرم یک نقطه است که خارج مستوی قاعده واقع باشد در شکل (۱-۵)، V رأس هرم و ABCDE قاعده هرم میباشد



شکل (۱-۵)

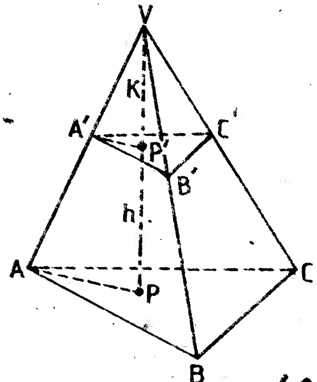
(۱- ۵) تعریف: ساحه چند ضلعی R دریک مستوی E و یک نقطه V خارج مستوی E داده شده است هرم باقاعده R و رأس V عبارت از اتحاد تمام خطوط VQ است طوریکه Q هر نقطه از ساحه R باشد وارتفاع هرم عبارت از قطعه خط عمود است که از رأس به قاعده هرم رسم گردد ، مانند h شکل (۱- ۵)

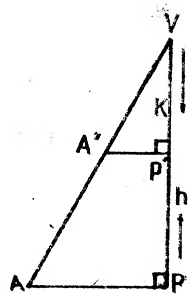
(۲ - ۵) مقطع هرم :

مقطع افقی یک هرم مستوی است که از تقاطع یک مستوی موازی به قاعده آن حاصل شود اگر مستوی قاطع از طرف قاعده به طرف رأس هرم موازی به قاعده حرکت نماید مساحت مقطع خورد شده و بالاخره به راس هرم به نقطه مبدل می شود .

(۳ - ۵) دعوی :

مقطع افقی یک هرم مثلث القاعده یک ساحه مثلث شکل است که شابه به قاعده هرم می باشد اگر h ارتفاع هرم و K ارتفاع مقطع از رأس هرم باشد مساحت مقطع عبارت از $\frac{K^2}{h^2}$ ضرب در مساحت قاعده است .





شکل (۲-۵)

در شکل (۲-۵) . $\hat{ABC}$ قاعده هرم و $\hat{A'B'C'}$ مقطع افقی هرم میباشد $\overline{VP}=h$ عبارت از ارتفاع هرم و $\overline{VP'}=K$ عبارت از ارتفاع مقطع از رأس است .

مثلث $\hat{VAP}$ و $\hat{VA'P'}$ مثلث های قایم الزاویه در مستوی های مربوطه خویش می باشند زیرا $\overline{VP}$ عمود بالای ΔABC و $\Delta A'B'C'$ است .

ثبوت : در مثلث های VAP و $VA'P'$ داریم که :

۱- $\angle V = \angle V$ . . . . مشترک

۲- $\angle P = \angle P'$ . . . . قایم اند

۳- $\angle VA'P' = \angle VAP$ . . . قدم های 1 و 2 (اگر دو زاویه یک مثلث مساوی به دو زاویه مثلث دیگر باشد زاویه سوم آنها مساوی است)

پس $\overset{\triangle}{VA'P'} \cong \overset{\triangle}{VAP}$ . . . . قدم های 1 ، 2 و 3

(1) . . . $\dfrac{\overline{VA'}}{\overline{VA}} = \dfrac{K}{h}$ . . . . مثلث های مشابه

به عین ترتیب مثلث های $\overset{\triangle}{VP'B'}$ و $\overset{\triangle}{VPB}$ باهم مشابه اند

$$\frac{\overline{VB'}}{\overline{VB}} = \frac{K}{h}$$

در مثلث های $\overset{\triangle}{VA'B'}$ و $\overset{\triangle}{VAB}$ داریم که :

۴- $\angle V' = \angle V$ . . . . مشترک

۵- $\angle VAB = \angle VA'B'$ . . . . $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$

۶- $\angle VBA = \angle VB'A'$ . . . . $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$

پس داریم که :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{VA'}}{\overline{VA}} \quad \ldots\ldots (2)$$

از مقایسه 1 و 2 داریم که :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{VA'}}{\overline{VA}} = \frac{K}{h} \quad \ldots\ldots (3)$$

و همچنین از مثلث های VBC و $VB'C'$ روابط ذیل حاصل می شود :

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{K}{h} = \frac{\overline{VB'}}{\overline{VB}} \quad \ldots\ldots (4)$$

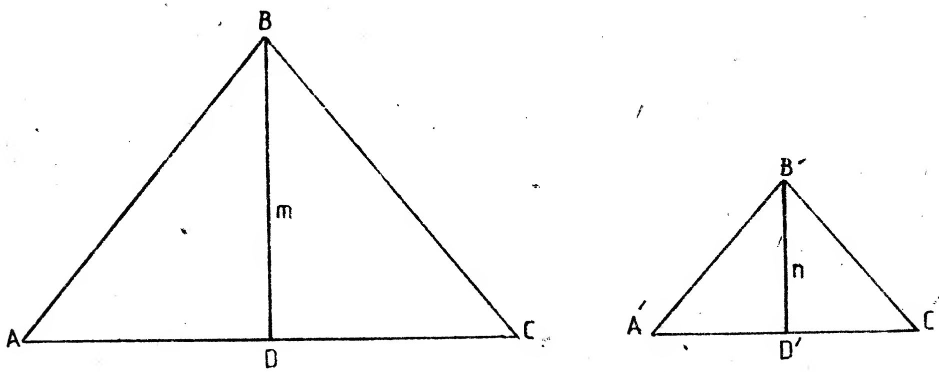
$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{K}{h} = \frac{\overline{VA'}}{\overline{VA}} \quad \ldots\ldots (5)$$

از مقایسه روابط (3) ، (4) و (5) داریم که :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} \quad \ldots\ldots (6)$$

پس $\Delta A'B'C' \approx \Delta ABC$

اگر ارتفاع مثلث ABC را به m و از مثلث $A'B'C'$ به n نشان دهیم می دانیم که :
مثلث ABC و $A'B'C'$ قاعده هرم‌اند شکل (۳–۵).



شکل (۳–۵)

چون مثلث ABD و $A'B'D'$ باهم مشابه اند

پس ، $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{m}{n}$ I

وهمچنین نظر به رابطه (5) نوشته می توانیم

$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{h}{K}$ II

ازمقایسه I و II می توانیم بنویسیم

$\dfrac{m^2}{n^2} = \dfrac{h^2}{K^2}$ III

نسبت ساحت مثلث های ABC و $A'B'C'$ قرار ذیل است :

$$\frac{\text{ساحت مثلث } ABC}{\text{ساحت مثلث } A'B'C'} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot m}{\frac{1}{2}\overline{A'C'}\cdot n} = \frac{\overline{AC}\cdot m}{\overline{A'C'}\cdot n}$$

اگر عوض $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ قیمت آنرا وضع نمائیم ،

$$\frac{\text{مساحت مثلث } ABC}{\text{مساحت مثلث } A'B'C'} = \frac{m \cdot m}{n \cdot n} = \frac{m^2}{n^2}$$

نظر به رابطه III داریم که :

$$\frac{\text{مساحت مثلث } ABC}{\text{مساحت مثلث } A'B'C'} = \frac{m^2}{n^2} = \frac{h^2}{K^2}$$

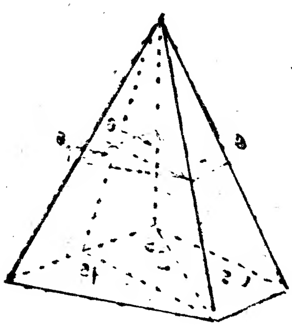
در نتیجه :

$$\frac{\text{مساحت مثلث } \overset{\triangle}{ABC}}{\text{مساحت مثلث } \overset{\triangle}{A'B'C'}} = \frac{h^2}{K^2}$$

$$\text{مساحت مثلث } \overset{\triangle}{A'B'C'} = \frac{K^2}{h^2}(\text{مساحت مثلث } \overset{\triangle}{ABC})$$

(۴-۵) دعوی :

در هر هرم نسبت مساحت یک مقطع بر مساحت قاعده مساوی به $\frac{K^2}{h^2}$ است درصورت h ارتفاع هرم و K مسافه عمودی مقطع از راس هرم باشد شکل (۴-۵) .



شکل (۴-۵)

ثبوت : مانند شکل (۴-۵) قاعده هرم را با مثلث ها ی T_1 ، T_2 . . . . T_n تقسیم مینمائیم و مساحت هر یک را به a_1 ، a_2 . . . . a_n نشان میدهیم و مساحت مثلث ها ی متقابل مقطع را به a'_1 ، a'_2 . . . . a'_n ارائه ی نمائیم پس مساحت قاعده عبارت است از :

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

مساحت قسمت ها ی متقابل در مقطع عبارت است از :

$$A_K = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n$$

نظر به دعوی قبلی داریم که :

$$\frac{\acute{a}_1}{a_1} = \frac{K^2}{h^2} \longrightarrow \acute{a}_1 = \frac{K^2}{h^2} a_1$$

$$\frac{\acute{a}_2}{a_2} = \frac{K^2}{h^2} \longrightarrow \acute{a}_2 = \frac{K^2}{h^2} a_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{\acute{a}_n}{a_n} = \frac{K^2}{h^2} \longrightarrow \acute{a}_n = \frac{K^2}{h^2} a_n$$

$$\acute{a}_1 + \acute{a}_2 \cdots + \acute{a}_n = \frac{K^2}{h^2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

$$AK = \frac{K^2}{h^2} \cdot A$$

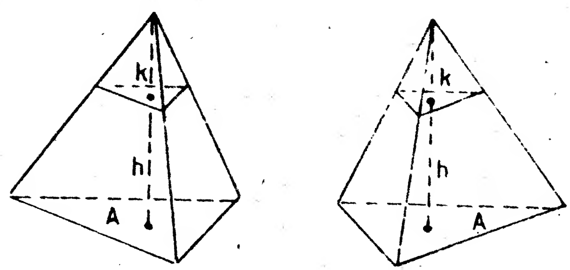
و یا

$$\frac{AK}{A} = \frac{K^2}{h^2}$$

(۵ ـ ۵) دعوی :

اگر دو هرم دارای عین ساحت قاعده و ارتفاعات آن ها نیز باهم مساوی باشد مقاطع که از رأس هریک به فاصله مساوی واقع باشد دارای ساحت مساوی نیز است .

ثبوت :



شکل (۵ ـ ۵)

طوریکه در شکل (۵ ـ ۵) ملاحظه می نمائید فرضاً ساحت قاعده هریک از هرم ها A و ارتفاع هریک از هرم ها h و K :

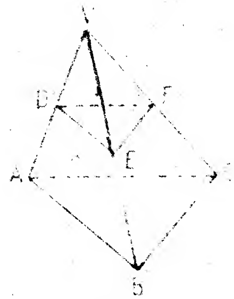
ارتفاع هریک از مقطع ها از رأس باشد پس ساحت هر مقطع مساوی است به :

$\frac{K^2}{h^2} \cdot A$ . . . . (چرا؟)

نوت : جهت ثبوت به دعوی قبلی مراجعه شود .

تمرینات

هرم ها به اساس شکل قاعده آن ها نام گذاری می شوند مثل هرم مثلثی، هرم مربعی، هرم مخمسی وغیره.



شکل (۶ - ۵)

۱- درهرم (V-ABC) مثلث ABC متساوی الاضلاع است مستوی موازی به قاعده ABC هرم، خط الرأس های هرم را درنقاط D، E و F قطع می کند طوریکه: $\overline{VE}=\frac{1}{2}\overline{EB}$
ثابت کنید که:

a- $\frac{\overline{DV}}{\overline{AV}}=?$ می باشد

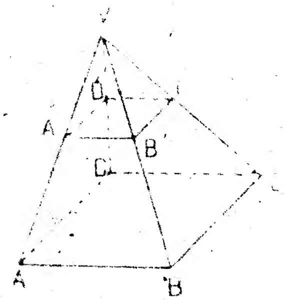
b- رابطه بین مثلث های DEV و ABV را دریافت کنید؟

C- رابطه بین مثلث های ABC و DEF را دریافت کنید؟

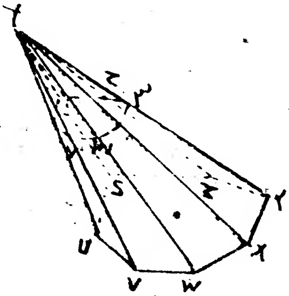
d- $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}=?$

e- اگر BC =6cm باشد مساحت مثلث DEF را دریافت کنید شکل (۶ - ۵)

۲- ارتفاع یک هرم مربع القاعده 10cm وطول یک ضلع قاعده آن 15cm است ساحت مقطع را دریافت نمائید که از رأس هرم 6cm فاصله داشته باشد شکل (۷ - ۵).



شکل (۷ - ۵)



شکل (۸ - ۵)

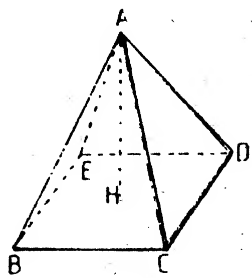
۳- مساحت قاعده یک هرم مخمس القاعده $72\,cm^2$ است ارتفاع هرم $12\,cm$ است مساحت مقطع را که $4\,cm$ از قاعده دور باشد دریافت کنید شکل (۸ - ۵).

۴- مساحت مقطع یک هرم که $9\,cm$ از رأس هرم فاصله دارد $108\,cm^2$ است اگر مساحت قاعده هرم $180\,cm^2$ باشد ارتفاع هرم را دریافت نمائید؟

۵- اگر هرم های که در شکل های (۷ - ۵) و (۸ - ۵) نشان داده شده است هردو هرم دارای عین ارتفاع باشند و قاعده هردو هرم دریک مستوی واقع است مقطع آنها نیز دریک مستوی قرار دارد درهرم شکل (۷ - ۵).

$AB = 2\sqrt{6}\,cm$، $A'B' = 3\sqrt{2}\,cm$ و مساحت قاعده شکل (۸ - ۵) مساوی $24\,cm^2$ است یعنی مساحه $suvwxyz$ مساوی $24\,cm^2$ است مساحه مقطع هرم شکل (۸ - ۵) را دریافت نمائید؟

نوت : هرم منظم هرم است که قاعده آن یک مضلع منظم است و رأس آن از هر کنج قاعده مساوی الفاصله باشد.



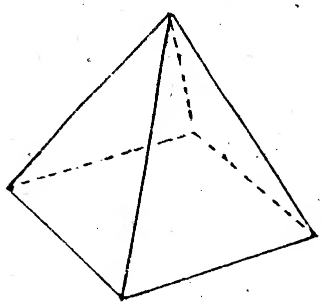
شکل (۹ - ۵)

۶- ثبوت نمائید که ارتفاع هرم منظم، قاعده را در نقطه قطع میکند که مساوی الفاصله از کنج های قاعده باشد شکل (۹ - ۵).

۷- یک خط الرأس قاعده هرم منظم که قاعده آن مربع است $10\,cm$ طول دارد ارتفاع هرم مذکور $12\,cm$ است مساحت کلی هرم

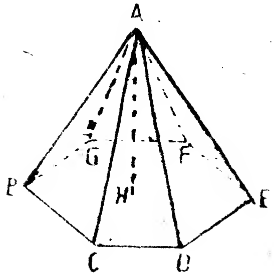
را دریافت نمائید ؟

۸ـ مساحت سطوح جانبی هرم مربع القاعده را دریافت نمائید که ارتفاع آن 15 cm و طول یک ضلع قاعده آن 16cm باشد شکل (۱۰ ـ ۵) .



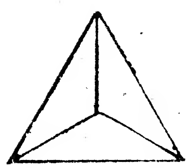
شکل (۱۰ ـ ۵)

۹ـ مساحت کلی (به شمول قاعده) یک هرم منظم مسدس القاعده را دریافت نمائید: درصورتیکه طول یک ضلع قاعده آن 8cm وارتفاع آن 12cm باشد شکل (۱۱ ـ ۵)

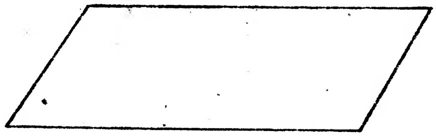


شکل (۱۱ ـ ۵)

۱۰ ـ یک هرم منظم مثلث القاعده داده شده است که طول هرخط الراس 8cm است مساحت مقطع را دریافت نمائید که از نقطه تقاطع هرچار ارتفاع آن عبور میکند . شکل (۱۲ ـ ۵) .

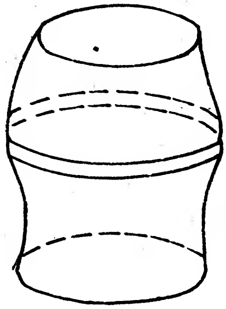


شکل (۱۲ ـ ۵) .



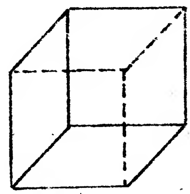
دو بعد

شکل (۱۱-۱)



سه بعد

شکل (۱۲-۱)



سه بعد

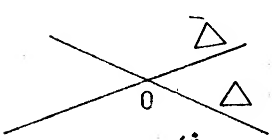
شکل (۱۲-۱)

(۱۳ - ۱) اوضاع نسبی دو مستقیم در فضاء :

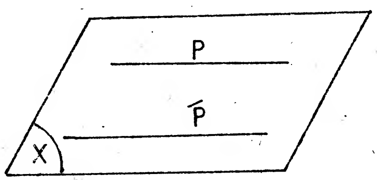
دو مستقیم نسبت به همدیگر سه حالت دارند

۱ـ دو مستقیم که تنها یک نقطه مشترک داشته باشند خطوط متقاطع نامیده می شوند شکل (۱۳-۱)

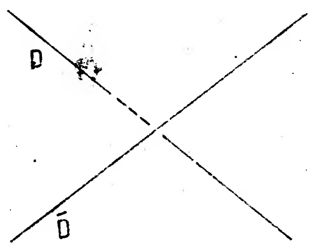
۲ـ دو مستقیم مشخص که در یک مستوی واقع بوده و نقطه مشترک نداشته باشند با هم موازی می باشند شکل (۱۴-۱).



شکل (۱۳-۱)



شکل (۱۴-۱)



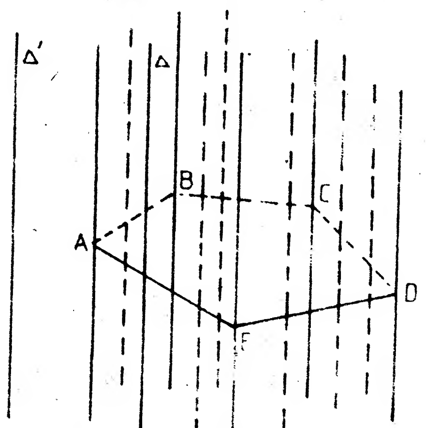
شکل (۱۵-۱)

فصل ششم

منشور

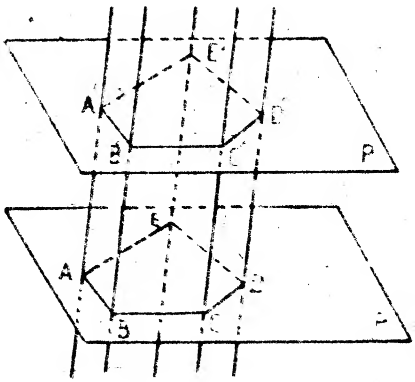
۱-۶) سطح منشور:

هرگاه خط مستقیم Δ در فضاء طوری حرکت نماید که در تمام حالات باخط ثابتی Δ' موازی باشد و Δ به محیط چند ضلعی ABCDE که مستوی ABCDE باخط Δ' موازی نباشد تکیه بماند از حرکت خط Δ سطح بوجود می آید که آن را سطح منشوری نامند خط مستقیم Δ را مولد و چند ضلعی ABCDE را هادی و هر موقعیت از Δ را که با نقاط A ، B ، C ، D و E تصادف نماید خط الرأس سطح منشوری و سطح را که بین خط الرأس متوالی واقع باشد وجه جانبی سطح منشوری می نامند شکل (۱-۶).



شکل (۱-۶)

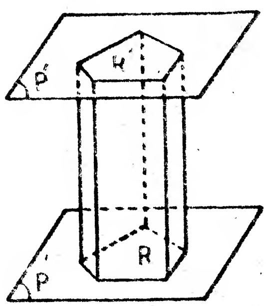
اگر دو مستوی متوازی که با خط الرأس های سطح منشوری موازی نباشد سطح منشوری را قطع نماید دو چند ضلعی مساوی بوجود می آورند در شکل (۲-۶) دو مستوی P و $\bar{P}$ موازی اند و دو مقطع آنها در سطح منشوری چند ضلعی ABCDF و $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$ باهم مساوی می باشند.



شکل (۲-۶)

(۲-۶) مقطع قایم:

هرگاه مستوی بر خط الرأس وجوه سطح منشوری عمود باشد مقطع آن با سطح منشوری یک چند ضلعی است که آنرا مقطع قایم می نامند و همه مقطع های قایم یک سطح منشوری باهم مساوی است



شکل (۳-۶)

(۳-۶) منشور:

جسمی که بیک سطح منشوری و دو مقطع متوازی آن محدود باشد منشور نامیده میشود مانند شکل (۳-۶).

دو مقطع متوازی R و R_1 را قاعده تین منشور نامند.

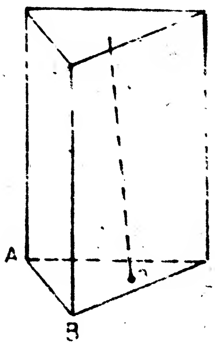
(۴-۶) سطح جانبی منشور:

قسمتی از سطح منشور را که بین قاعده تین متوازی آن قرار گرفته است سطح جانبی منشور می نامند. در هر منشور خط الرأس ها باهم مساوی اند زیرا خط الرأس ها، خطوط موازی محصور بین دو مستوی متوازی هستند. وجوه جانبی هر منشور متوازی الاضلاع می باشند اگر قاعده منشور مثلث، چار ضلعی، پنج ضلعی . . . . و n ضلعی باشد منشور را سه پهلو، چهار پهلو

پنج پهلو . . . n پهلوئی نامند .

(٥ـ٦) ارتفاع منشور:

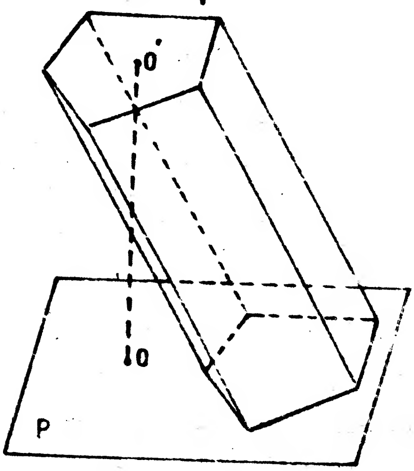
فاصله بین قاعده تین منشور را ارتفاع منشور می نامند در شکل (٤-٦) خط $\overline{OO'}$ عبارت از ارتفاع منشور مثلث القاعده $ABC\,A'B'C'$ است OO' عمود بر مستوی قاعده تین منشور می باشد .



شکل (٤-٦)

(٦-٦) منشور قایم :

اگر خط الرأس های منشور بر مستوی قاعده آن عمود باشند منشور را قایم می گویند . درین صورت وجوه جانبی منشور مستطیل می باشند و ارتفاع منشور با طول هر یک از خط الرأس های منشور مساوی است .



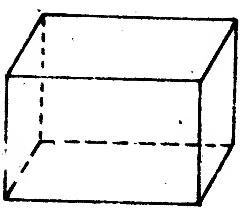
شکل (٥-٦)

(٧-٦) منشور مایل :

منشور اگر قایم نباشد مایل می نامند در شکل (٥-٦) $\overline{OO'} \perp P$ ارتفاع منشور مایل است .

(٨-٦) منشور منظم :

منشور قایم که قاعده آن چند ضلعی منظم باشد منشور منظم نامیده می شود وجوه جانبی منشور منظم مستطیل های مساوی میباشد شکل (٦-٦) .



شکل (٦-٦)

(۹ - ٦) منشور ناقص :

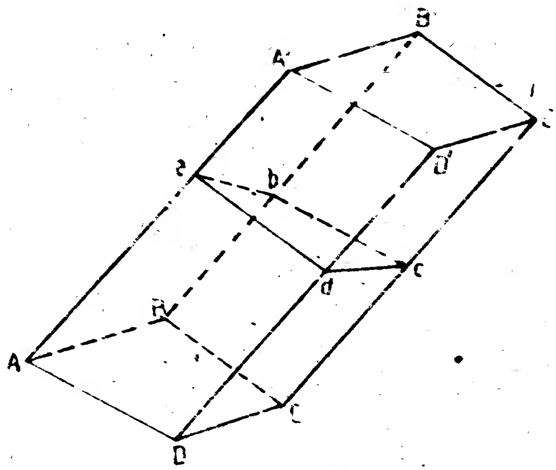
هرگاه دو مستوی غیر موازی همه خط الرأس های سطح منشوری را قطع نماید یک چند وجهی بدست می آید که آن را منشور ناقص می نامند .

(۱۰ - ٦) مساحت جانبی منشور :

مجموع مساحت تمام سطوح جانبی منشور را مساحت جانبی منشور می نامند مساحت جانبی هر منشور مساوی است به حاصل ضرب طول محیط مقطع قایم در طول خط الرأس جانبی. زیرا تمام سطوح جانبی منشور متوازی الاضلاع ها می باشد اگر قاعده آنها را سطح جانبی فرض نمائیم ، ارتفاع شان یکی از اضلاع مقطع قایم می باشد .

مثال : مساحت جانبی منشور مایل $ABCDA'B'C'D'$ دریافت نمائید ؟

حل :- اگر $abcd$ یک مقطع قایم منشور باشد طوریکه :



$$\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{da}=P$$

واگر l طول هریک از خط الرأس های منشور باشد یعنی :

$$l=\overline{DD'}=\overline{CC'}=\overline{BB'}=\overline{AA'}$$

واگر مساحت سطوح جانبی را به S ارائه نمایم شکل (۷-٦) .

شکل (۷-٦)

$$S=(ABB'A' \text{ مساحت})+(BCC'B' \text{ مساحت})+(CDD'C' \text{ مساحت})+(DAA'D' \text{ مساحت})$$

یا
$$S=(\overline{ab}\cdot l)+(\overline{bc}\cdot l)+(\overline{cd}\cdot l)+(\overline{da}\cdot l)$$

یا
$$S=(\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{da})\,l$$

$S = Pl$ یا

(۶-۱۱) مساحت جانبی منشور قایم :

چون در منشور قایم مقطع قایم برابر قاعده آن است پس مساحت سطوح جانبی منشور قایم مساوی است به حاصل ضرب محیط قاعده منشور در ارتفاع آن.

(۶-۱۲) مساحت کلی منشور:

مساحت کلی منشور مساوی است به مساحت سطوح جانبی آن جمع مجموع مساحت قاعده تین آن.

مثال: مساحت کلی منشور قایمی را دریافت نمائید که قاعده آن شش ضلعی منظم بوده طول یک ضلع شش ضلعی 8cm و ارتفاع آن 10cm است.

حل: محیط قاعده منشور: $8cm + 8cm + 8cm + 8cm + 8cm + 8cm = 48cm$

در شکل (۶-۸) $\overline{OH}$ ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع $\widehat{ABO}$ است

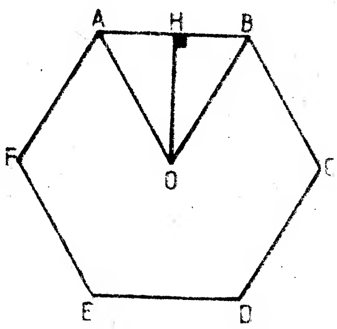
لذا:

$$\overline{OH}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{HB}^2$$

$$\overline{OH}^2 = 8^2 - 4^2$$

$$\overline{OH}^2 = 48\,cm^2$$

$$\overline{OH} = 4\sqrt{3}\ cm$$



شکل (۶-۸)

مساحت سطوح جانبی منشور $S = 48cm \times 10cm = 480cm^2$

مساحت یک قاعده $S_1 = 48\,cm \times \frac{1}{2}(4\sqrt{3}\ cm)$

$$= 96\sqrt{3}\ cm^2$$

مساحت هر دو قاعده $2S_1 = 96\sqrt{3}\ cm^2 \times 2 =$

$$= 192\sqrt{3}\ cm^2$$

مساحت کل منشور $\acute{S} = 480\,cm^2 + 192\sqrt{3}\,cm^2$,

$$\acute{S} = 96(5 + 2\sqrt{3})\,cm^2$$

(۱۳-٦) متوازی السطوح :

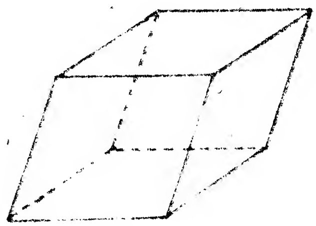
منشوری راکه قاعده های آن متوازی الاضلاع باشد متوازی السطوح می نامند شکل (۹-٦) .

– هر متوازی السطوح دارای شش وجه ، هشت رأس ، دوازده خط الرأس وچار قطر است .

– هر دو سطح که نقطه مشترک ندارند سطوح متقابل متوازی السطوح نامیده می شود

– در متوازی السطوح هر یک از دو سطح متقابل را می توان قاعده فرض نمود .

– درهر متوازی السطوح خط الرأس ها چار به چار مساوی ومتوازی اند .



شکل (۹-٦)

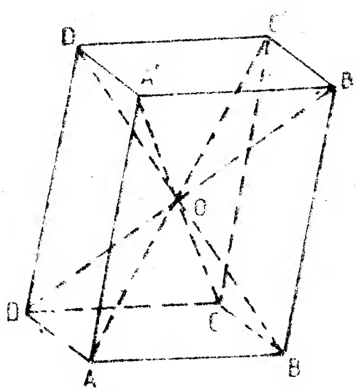
– چار قطر متوازی السطوح ازیک نقطه میگذارند ویکدیگر را تنصیف می نمایند .

– محل تلاقی چار قطر متوازی السطوح را مرکز آن می نامند .

(۱۴-٦) مکعب مستطیل :

متوازی السطوح قایم که قاعده اش مستطیل باشد مکعب مستطیل نامیده می شود شکل (۱۰-٦) .

درهر مکعب مستطیل ، مربع طول هر قطر مساوی است به مجموع مربع ها سه بعد آن .



شکل (۱۰-٦)

اگر ابعاد مکعب مستطیل را $\overline{AB} = a$ ، $\overline{AD} = b$ و $\overline{AA'} = c$

فرض کنیم در مثلث $\overset{\triangle}{BDD'}$ داریم:

$$\angle BDD' = 90^\circ$$

قرار دعوی فیثاغورث می توانیم بنویسیم

$$\overline{BD'}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{DD'}^2$$

و در مثلث $A\overset{\triangle}{D}B$ داریم: $\angle DAB = 90^\circ$

$$\overline{DB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2$$

بنابرآن:

$$\overline{BD'}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{DD'}^2$$

$$\overline{BD'}^2 = b^2 + a^2 + c^2$$

$$\overline{BD'} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

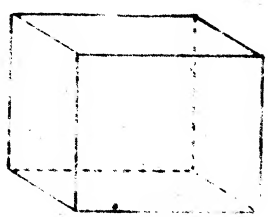
به همین ترتیب می توانید ثابت نمائید که طول سه قطر دیگر مکعب مستطیل مساوی به $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ می باشد.

(۱۵-۶) مکعب:

اگر سه بعد مکعب مستطیل با هم مساوی باشند آنرا مکعب می نامند چون در هر مکعب هر سه بعد مساوی اند اگر d قطر مکعب را نشان دهد

طول یکی از اضلاع آن a باشد

داریم که شکل (۱۱-۶).



شکل (۱۱-۶)

$$a^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

چون $a = b = c$ است

$$a^2 = a^2 + a^2 + a^2$$

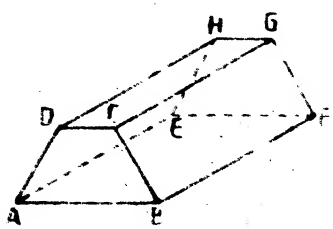
$$d = a\sqrt{3}$$

مساحت جانبی مکعب $S = 4a^2$

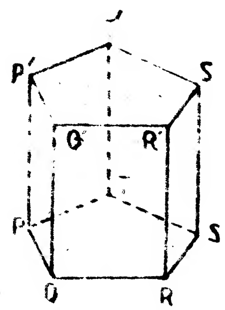
مساحت کل مکعب $\bar{S} = 6a^2$

تمرینات

۱- شکل (۱۲-۲) یک منشور قایم که به روی یک وجه بالای زمین قرار دارد و قاعده‌تین منشور متذکره ذوذنقه است اگر طول اضلاع موازی قاعده 9cm و 5cm باشد وطول اضلاع غیر موازی آن 5cm و 6cm باشد و BF = 12cm باشد مساحت سطوح جانبی را دریافت نمائید؟



شکل (۱۲-۲)

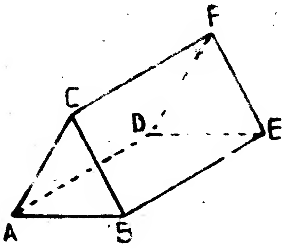


شکل (۱۳-۲)

۲- ارتفاع یک منشور مخمس القاعده 8cm است طول اضلاع قاعده آن 2cm، 5cm، 7cm، 7cm و $8\frac{1}{2}$ cm است مساحت سطوح جانبی منشور را دریافت نمائید شکل (۱۳-۲).

۳- اگر قطر یک مکعب $16\sqrt{3}$cm باشد مساحت کل جسم را دریافت نمائید؟

۴- اگر ابعاد یک مکعب مستطیل 4cm، 7cm و 12cm باشد مساحت کل جسم را دریافت نمائید؟

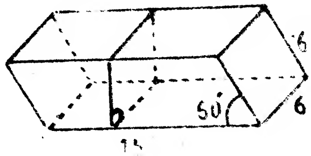


شکل (۱۴-۲)

۵- در شکل (۱۴-۲) قاعده‌تین منشور مثلث های متساوی الاضلاع می باشد و سطوح جانبی آن مستطیل ها است اگر طول یک ضلع مثلث 6cm و ارتفاع منشور

10cm باشد ساحت منشور را دریافت نمائید؟

۶- در شکل (۱۵-۶) قاعده متوازی السطوح، مستطیل است که طول آن 15cm و عرض آن 6cm است دو وجه آن مربع است که همرای قاعده زاویه 60 را تشکیل میدهد ساحت کل جسم را دریافت نمائید؟



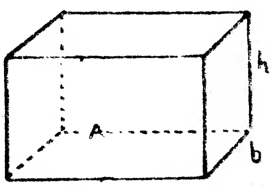
شکل (۱۵-۶)

(۱۲-۶) حجم منشور و هرم :

اصل اول :

حجم یک مکعب مستطیل عبارت از حاصل ضرب ارتفاع در ساحت قاعده است شکل (۱۲-۶) .

اگر طول قاعده a ، عرض قاعده b و ارتفاع مکعب مستطیل h باشد ساحت آن مساوی می شود به :



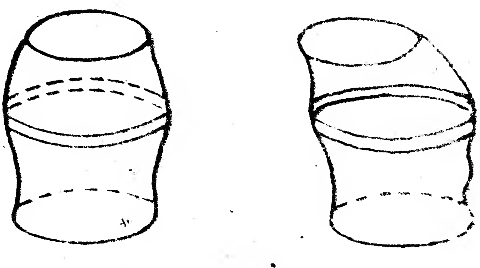
$V = Ah = abh$

شکل (۱۲-۶)

$$A = A \cdot h = a \cdot b \cdot h$$

اصل دوم : دو جسم در یک مستوی مانند شکل (۱۷-۶) داده شده است .

اگر مستوی موازی به مستوی قاعده آنها رسم گردد و اجسام مذکور را افقی قطع نماید که دارای ساحت مساوی باشد اجسام مذکور دارای احجام مساوی می باشند. اصل فوق به نام (Cavalieri's) مسمی است.

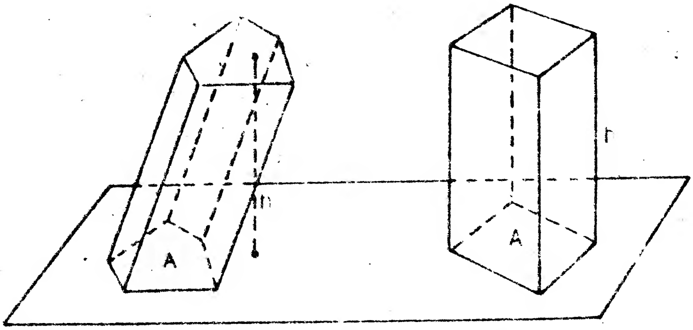


شکل (۱۷-۶)

(۱۷ـ۶) دعوی :

حجم هر منشور مساوی به حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن می باشد یعنی $V = A \cdot h$

ثبوت : اگر h ارتفاع و A مساحت قاعده یک منشور باشد شکل (۱۸ـ۶) مکعب مستطیل که دارای عین ارتفاع h وقاعده آن نیز A



شکل (۱۸ـ۶)

باشد درنظر می گیریم اگر قاعده منشور ومکعب مستطیل درعین مستوی واقع باشد واگر مستوی موازی به مستوی قاعده آنها رسم شود قرار دعوی (۵ ـ ۵) مقاطع آنها دارای مساحت مساوی می باشد نظر به اصل دوم (کاوالیرز) هردوجسم دارای عین حجم می باشند نظر به اصل اول حجم مکعب مستطیل عبارت است از ،

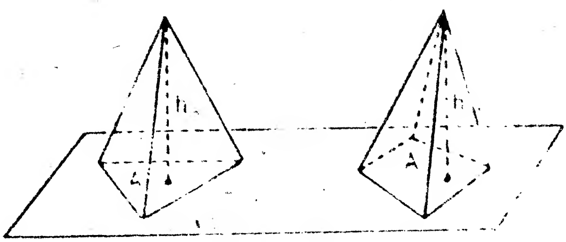
$$V_{\text{مکعب مستطیل}} = A\,h$$

پس نظر به اصل دوم داریم که ،

$$V_{\text{منشور}} = A\,h$$

(۱۸ـ۶) دعوی :

اگر دو هرم دارای عین ارتفاع ومساحت قاعدهٔ آنها باهم مساوی باشد ونیز قاعده هردوی آنها دریک مستوی قرار داشته باشد هرمهای متذکره دارای عین حجم اند .



شکل (۱۹ ـ ۶)

۳- دو مستقیم مشخص که نقطه مشترک نداشته و دریک مستوی هم واقع نباشد متنافر نامیده می شوند شکل (۱۵ - ۱) .

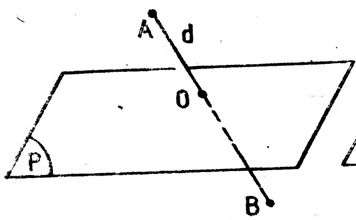
(۱۴ - ۱) اوضاع نسبی یک مستقیم و مستوی :

یک خط ویک مستوی نسبت به هم سه حالت دارند .

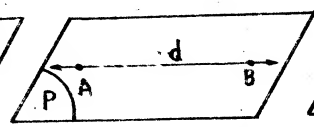
۱- هرگاه یک قطعه خط ویک مستوی یک نقطه مشترک داشته باشند ، دراین صورت خط d با مستوی P درنقطه مانند O متقاطع می باشند شکل (۱۶ - ۱) .

۲- اگریک خط و مستوی هیچ نقطه مشترک نداشته باشند دراین صورت خط d با مستوی P موازی است شکل (۱۷ - ۱) .

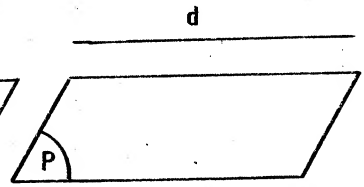
۳- اگرخط و مستوی دونقطه مشترک داشته باشند درین صورت همه نقاط خط d بر مستوی P واقع است یعنی خط d برمستوی P منطبق است شکل (۱۸ - ۱) .



شکل(۱-۱۶)



شکل(۱-۱۸)



شکل(۱-۱۷)

اوضاع نسبی دومستوی :

دو مستوی نسبت به هم دیگر سه حالت دارند .

۱- اگر دو مستوی P و $\bar{P}$ دارای یک خط مشترک باشند آنها را متقاطع نامند وخط مشترک آنها را فصل مشترک مستوی های P ، $\bar{P}$ نامند شکل (۱۹ - ۱)

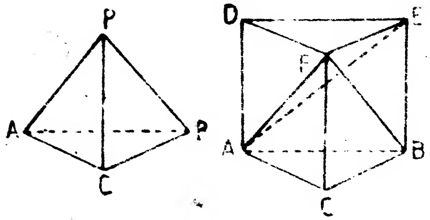
ثبوت : اگر اهرام مذکور توسط یک مستوی موازی به قاعده آنها قطع گردد نظر به دعوی (۵ - ۵) دارای مقاطع مساوی می باشند و نظر به اصل دوم حجم هر دو هرم باهم مساوی است شکل (۱۹-٦) .

(۱۹-٦) دعوی :

حجم یک هرم که قاعده آن مثلثی باشد مساوی به ثلث $(\frac{1}{3})$ مساحت قاعده ضرب در ارتفاع آنست .

حالت اول : یک هرم مثلث القاعده P _ ABC مفروض است شکل (۲۰ - ٦)

خطوط $\overline{AD}$ و $\overline{BE}$ راموازی ومساوی به $\overline{CP} = \overline{CF}$ رسم می نمائیم اگر D رابنقاط F ، E و E رابه A و F وصل نمائیم منشور ABCDFE حاصل می شود منشور متذکره باهرم P _ ABC و یا F _ ABC عین قاعده وارتفاع را دارند قاعده مشترک آنها ABC می باشد .

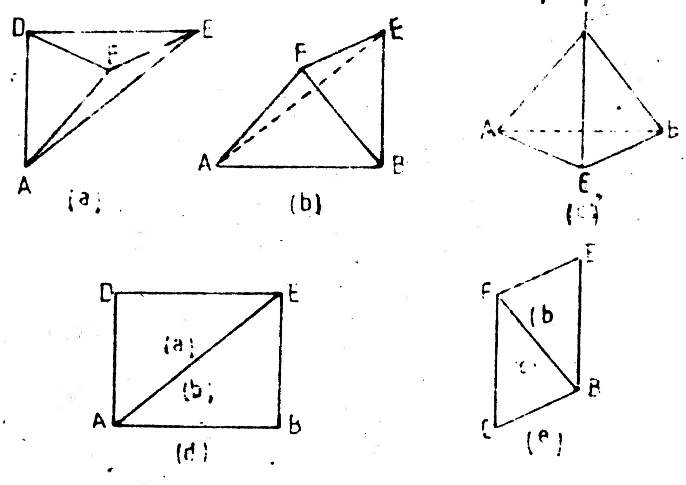


شکل (۲۰-٦)

حجم منشور ABCDEF معادل حجم هرم های A-BEF ، A-CEF و A-FBC می باشد اشکال (۲۱-٦) .

I ـ اهرام A-DEF و A-BEF عین حجم دارند .

ثبوت : F رأس مشترک هردو هرم می باشد قاعده آن ها عبارت از $\overset{\triangle}{ADE}$ و $\overset{\triangle}{ABE}$ می باشد .



شکل (۲۱-٦)

مثلث های متذکره مطابق (d -۲۱-٦) دریک مستوی واقع بوده وانطباق پذیراند چون عین رأس را، یند پس ارتفاع آنهانیز باهم مساوی است پس ،

$$\text{حجم } A\text{-}DEF = \text{حجم } A\text{-}BEF \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

II - اهرام A-BEF A-FBC دارای احجام مساوی اند .

ثبوت : اگر A رأس مشترک هردو هرم باشد قاعده آنها عبارت از $B\hat{E}F$ و $F\hat{B}C$ می باشد مثلث های متذکره مطابق (e -۲۱-٦) دریک مستوی واقع بوده وانطباق پذیراند ؟

چون اهرام متذکره دارای عین رأس اند پس ارتفاع آنها باهم مساوی بوده پس داریم که ،

$$\text{حجم } A\text{-}BEF = \text{حجم } A\text{-}FBC \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

ازمقایسه مساوات (۱) و (۲) داریم که ،

$$\text{حجم } A\text{-}DEF = \text{حجم } A\text{-}BEF = \text{حجم } A\text{-}FBC \quad . \; . \; . \; (3)$$

اگرمساحت قاعده منشور ABCDEF ویاهرم P- ABC ویاهرم A-FBC رابه a نشان دهیم پس حجم منشور،

$$V_1 = a \cdot h$$

h ارتفاع منشور ویاهرم P. ABC است .

چون منشور متذکره مساوی به ۳ عدد هرم مانند رابطه (۳) است اگر حجم هرم رابه V ارائه کنیم داریم که ،

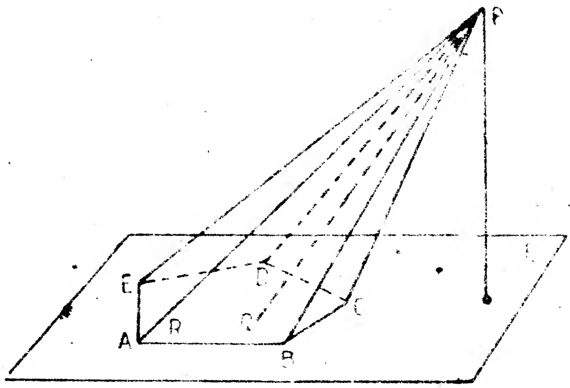
$$V_1 = 3V = a \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} a \cdot h$$

حالت دوم : هرم کیفی P-ABCDE را درنظر میگیریم شکل (۲۲- ٦) .

واضح است که این هرم مجموع سه هرم مثلث قاعده P-ABC، P-ACD و P-ADE می باشد قاعده هرم های مذکور مثلث های $A\hat{B}C$ ، $A\hat{C}D$ و $A\hat{D}E$ می باشد .اگرمساحت

قاعده آنها را به a_1 ، a_2 و a_3 ارتفاع آنها را به h نشان دهیم پس حجم ۷ هرم



شکل (۲۲-۶)

P.ABCDE مساوی است به :

$$v = \frac{1}{3}a_1h + \frac{1}{3}a_2h + \frac{1}{3}a_3h$$

$$v = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)h$$

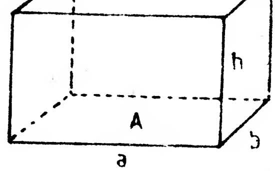
اگر $a_1 + a_2 + a_3 = a$

$$v = \frac{1}{3}a \cdot h$$

تمرینات

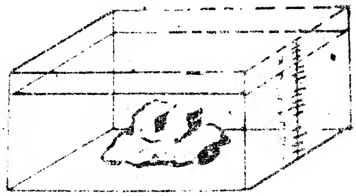
۱- ارتفاع یک مکعب مستطیل 7cm ، طول قاعده 5cm و عرض آن 4cm است حجم جسم را دریافت نمائید شکل (۲۳-۶) .

۲- یک پیپ فلزی که دارای ابعاد 1dm x 1dm x 1dm می باشد اگر یک لیتر یک مایع دارای حجم $1000cm^3$ باشد در پیپ فوق الذکر چند لیتر آب گنجایش دارد ؟



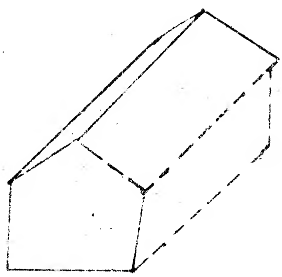
شکل (۲۳-۶)

۳ - یک توته فلزی در تانک آب انداخته شده که کاملاً غرق گردیده است وارتفاع آب را به اندازه 0,35cm بالا برده است اگر طول تانک 20cm وعرض آن 15cm باشد حجم فلز را محاسبه نمائید شکل (۲۴-۶).



شکل (۲۴-۶)

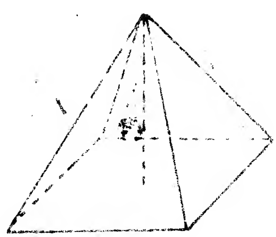
۴ - جهت تعیین نمودن یک ایرکاندیشن مربوط حجم تعمیر است طوریکه درشکل (۲۵-۶) ملاحظه می کنید قاعده تعمیر مستطیل بوده که دارای عرض 42m وطول 130m می باشد اگر ارتفاع دیوارها 9.5m وارتفاع اعظمی چت 15m باشد حجم تعمیر را محاسبه نمائید؟



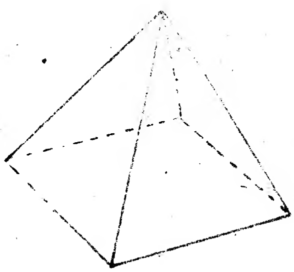
شکل (۲۵-۶)

۵ - حجم هرم مربع القاعده را دریافت نمائید که طول یک ضلع قاعده آن 12cm وارتفاع آن نیز 12cm باشد علاوتاً مساحت سطوح جانبی آن را معلوم نمائید شکل (۲۶-۶)

۶ - فارمول را جهت دریافت حجم هرم منظم مربع القاعده دریافت نمائید که وجوه آن مثلث های متساوی الاضلاع باشد شکل (۲۷-۶).



شکل (۲۶-۶)



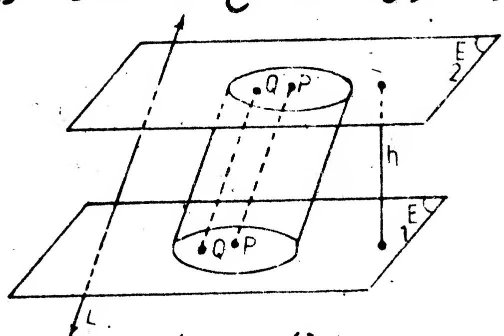
شکل (۲۷-۶)

فصل هفتم

استوانه و مخروط

(۱-۷) استوانه :

خط مستقیم L خارج دایره که مرکز آن P است واقع شده است و سطوح موازی E_1 و E_2 را قطع می نمایند.



شکل (۱-۷)

یک نقطه Q به روی دایره P در سطح E_1 و $\bar{Q}$ در سطح E_2 در نظر می گیریم طوریکه $\overline{Q\bar{Q}} \parallel L$ باشد (Q هر نقطه دایره P می باشد) از اثر دوران خط $Q\bar{Q}$ و حرکت نقطه Q به روی دایره P استوانه حاصل می شود شکل (۱-۷).

عمودی که از E_2 بالای E_1 رسم شود ارتفاع h استوانه است.

تقاطع هر مستوی موازی به E_1 که استوانه را قطع نماید مقطع استوانه نامیده می شود .

اگر $L \perp E_1$ باشد استوانه تولید شده $L \parallel QQ'$ قایم می باشد در شکل (۱-۷) دایره

P قاعده استوانه و دایره $\bar{P}$ را قاعده فوقانی استوانه نامند و سطح که استوانه را احاطه نموده است

سطح جانبی استوانه نامیده می شود .

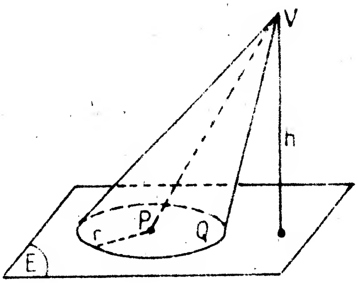
(۲-۷) مخروط :

سطح مخروطی عبارت از ست نقاط است که از اثر دوران نقطه Q ، مستقیم $\overline{VQ}$ به روی

دایره P حاصل شود طوریکه V یک نقطه

ثابت می باشد (نقطه V خارج مستوی دایره

P واقع است) .



شکل (۲-۷)

خط $\overline{VQ}$ را مولد و نقطه V را رأس مخروط

نامند در شکل (۲-۷) عمودیکه از نقطه V به روی

مستوی E رسم گردیده است ارتفاع h مخروط

است . دایره P را قاعده ، نقطه V را رأس مخروط نامند و سطح بدون از قاعده که مخروط را احاطه

نموده است سطح جانبی مخروط نامند .

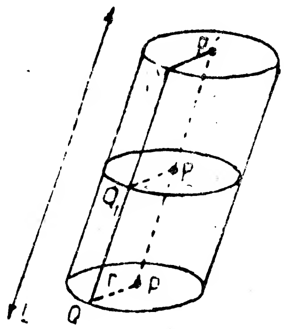
(۳-۷) دعوی :

تمام مقاطع (هر مستوی که موازی به قاعده رسم شده باشد تقاطع آنرا با استوانه مقطع نامند)

استوانه که قاعده آن دایروی باشد یک سطح دایروی بوده که با قاعده استوانه انطباق پذیری باشد .

ثبوت : در شکل (۳-۷) دایره P ، قاعده استوانه و دایره P_1 مقطع استوانه است

$P_1Q_1 \parallel PQ$ . . . . . شعاع مقطع با شعاع قاعده موازی است



شکل (۳ - ۷)

پس شکل QQ_1P_1P یک متوازی الاضلاع است

زیرا $\overline{PP_1} \parallel \overline{QQ_1} \parallel L$

لذا $\overline{P_1Q_1} = \overline{PQ} = r$ است.

پس دایره P_1 با دایره P انطباق پذیر است.

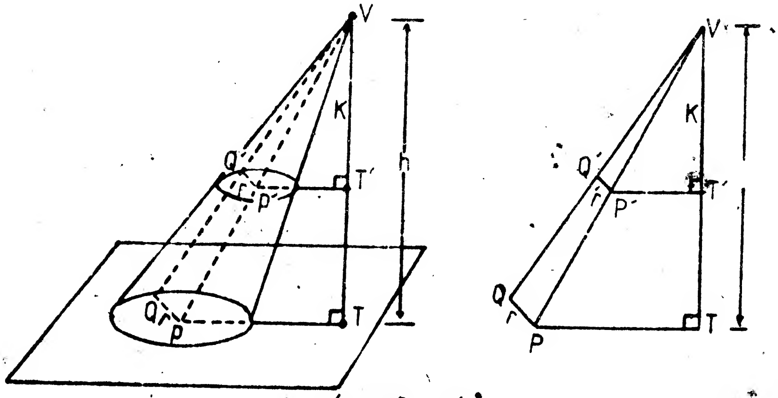
(۴ – ۷) دعوی : تمام مقاطع استوانه با قاعده دایروی دارای مساحت مساوی به قاعده می باشد.

ثبوت : در دعوی فوق ثبوت نمودیم که $\overline{P_1Q_1} = \overline{PQ} = r$ است.

لذا مساحت هر یک از آنها πr^2 است.

(۵ – ۷) دعوی :

مخروطی با ارتفاع h داده شده است مقطع به مسافه K از رأس V قطع گردیده است مساحت مقطع مذکور عبارت از $\frac{K^2}{h^2}$ ضرب مساحت قاعده می باشد. شکل (۴ – ۷).



شکل (۴-۷)

ثبوت :

I- میدانید که سطح مقطع با قاعده موازی است. لذا مثلث های $\overset{\triangle}{VPT}$ و $\overset{\triangle}{V\bar{P}\bar{T}}$ باهم مشابه اند زیرا

۱- $\widehat{PTV} = \widehat{\bar{P}\bar{T}V}$ . . . . $PT \parallel \overline{\bar{P}\bar{T}}$

۲- $\widehat{TPV} = \widehat{\bar{T}\bar{P}V}$ . . . . $PT \parallel \overline{\bar{P}\bar{T}}$

۳- $\hat{V} = \hat{V}$ . . . . . مشترک

لذا $\overset{\triangle}{V\bar{P}\bar{T}} \sim \overset{\triangle}{VPT}$

پس داریم که: $\dfrac{\overline{V\bar{P}}}{\overline{VP}} = \dfrac{\overline{V\bar{T}}}{\overline{VT}} = \dfrac{K}{h}$

II- مثلث های $V\bar{P}\bar{Q}$ و VPQ باهم مشابه اند زیرا:

۱- $\hat{V}_1 = \hat{V}_1$ . . . . .

۲- $\widehat{\bar{Q}\bar{P}V} = \widehat{QPV}$ . . . . $\overline{QP} \parallel \overline{\bar{Q}\bar{P}}$

۳- $\widehat{\bar{P}\bar{Q}V} = \widehat{PQV}$ . . . . $\overline{QP} \parallel \overline{\bar{Q}\bar{P}}$

بناءً مثلث های $V\bar{P}\bar{Q}$ و VPQ باهم مشابه اند.

پس داریم که: $\dfrac{\overline{\bar{P}\bar{Q}}}{\overline{PQ}} = \dfrac{\overline{V\bar{P}}}{\overline{VP}} = \dfrac{K}{h}$

ویا $\overline{\bar{P}\bar{Q}} = \dfrac{K}{h}\,\overline{PQ}$ I

اگر مساحت قاعده را به A و مساحت مقطع را به A_1 نشان دهیم داریم که :

$$A = \overline{PQ}^2 \cdot \pi = \pi r^2$$

$A_1 = \overline{\bar{P}\bar{Q}}^2 \cdot \pi = \pi\left(\dfrac{K}{h}\,\overline{PQ}\right)^2$ . . . . . مساوات (I)

$$A_1 = \left(\frac{K^2}{h^2} \cdot \overline{PQ}^2\right) \cdot \pi$$

$$A_1 = \frac{K^2}{h^2} \cdot r^2 \cdot \pi$$

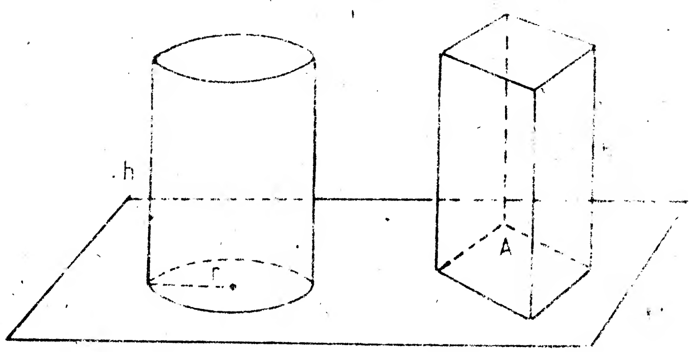
$$A_1 = \pi \frac{K^2}{h^2} \cdot r^2$$

$$\boxed{A_1 = \frac{K^2}{h^2} A}$$

دعوی :

حجم یک استوانه با قاعده مدور مساوی است به ساحت قاعده ضرب در ارتفاع .

ثبوت : اگر h ارتفاع و A ساحت قاعده یک استوانه باشد شکل (۵-۷) مکعب مستطیل که دارای عین ارتفاع h و قاعده آن نیز A باشد در نظر میگیریم قاعده استوانه و مکعب مستطیل در یک مستوی واقع می‌باشند اگر یک مستوی موازی به مستوی قاعده آن‌ها رسم گردد قرار دعوی (۵-۵) مقاطع آن‌ها دارای مساحت مساوی می‌باشد نظر به اصل دوم (قانون کاولیرا) .



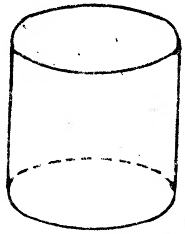
شکل (۵-۷)

هر دو جسم دارای عین حجم می‌باشد .

حجم مکعب مستطیل	$V = A \cdot h$
حجم استوانه	$V = A \cdot h$
ساحت دایره	$A = \pi r^2$
حجم استوانه	$V = \pi r^2 h$

تمرینات

۱- اگر قطر قاعده یک استوانه 8cm وارتفاع آن 8cm باشد مساحت تمام سطح و حجم استوانه را محاسبه نمائید شکل (۶ - ۷).

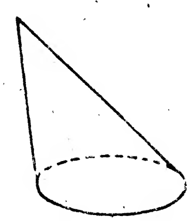


شکل (۶ - ۷)

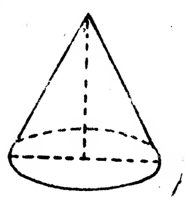
۲- یک نل سفالین 21cm طویل است قطر داخلی آن 4.5cm وقطر کلی آن 5.1cm است حجم موادی را دریافت نمائید که نل از آن ساخته شده است؟

۳- اگر قطر داخلی یک نل یک سانتی متر باشد طول نلی را دریافت نمائید که $1000cm^3$ آب را گنجایش داشته باشد ($\pi = 3,14$).

۴- حجم مخروط را دریافت نمائید که قاعده آن مدور بوده، ارتفاع 12cm وشعاع قاعده آن 3,2cm باشد. شکل (۷ - ۷).



شکل (۷ - ۷)

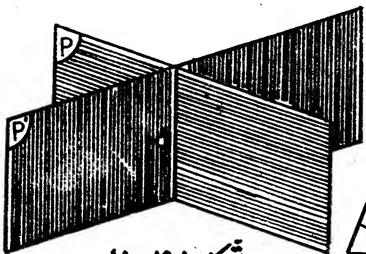


شکل (۸ - ۷)

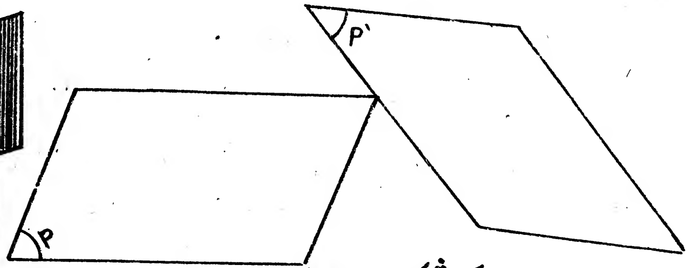
۵- شکل (۸ - ۷) یک مخروط مدور قایم را نشان میدهد اگر حجم آن $48\pi cm^3$ باشد وقطر قاعده آن 8cm باشد ارتفاع آن دریافت نمائید؟

۶- ارتفاع یک مخروط 9cm است مستوی موازی به قاعده آن یک مخروط کوچک جدا می نماید مسافه بین دو مستوی 5cm است،

a - نسبت ارتفاعات دو مخروط چند است؟



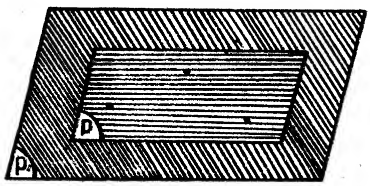
شکل (۱۹-۱)



شکل (۲۰-۱)

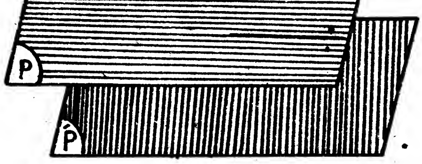
نوت : اگر دو مستوی یک نقطه مشترک داشته باشند باهم متقاطع اند شکل (۲۰ - ۱).

۲- دو مستوی باهم منطبق است درصورتیکه سه نقطه مشترک داشته باشند شکل (۲۱ - ۱) .



شکل (۲۱-۱)

۳- اگر دو مستوی هیچ نقطه مشترک نداشته باشند چنین مستوی ها را متوازی گویند شکل (۲۲-۱).



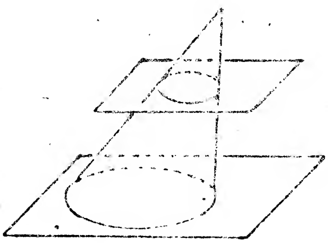
شکل (۲۲-۱)

b ـ نسبت شعاعات قاعده وقطع آنها را دریافت نمائید ؟

c ـ نسبت مساحت قاعده وقطع آنها را دریافت نمائید ؟

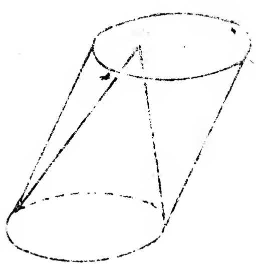
d ـ نسبت حجم مخروط قطع شده وکل مخروط را دریافت نمائید ؟

۷ ـ ارتفاع یک مخروط 5cm است مستوی به فاصله 2cm موازی به قاعده آن رسم گردیده است اگر حجم مخروط کوچک $24cm^3$ باشد حجم تمام مخروط را محاسبه نمائید شکل (۹-۷)



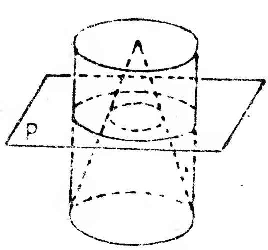
شکل (۹-۷)

۸ ـ مطابق شکل (۱۰ ـ ۷) مخروطی داخل استوانه قرار دارد قاعده مخروط واستوانه باهم مساوی است راس مخروط وقاعده فوقانی استوانه عین ارتفاع دارند فارمولی را جهت دریافت حجم ساحه بین مخروط و استوانه بنویسید درصورتیکه شعاع قاعده استوانه r وارتفاع آن h باشد .



شکل (۱۰ ـ ۷)

۹ـ مطابق شکل (۱۱ـ ۷) مخروط قایم بین استوانه قایم قرار دارد . مستوی P موازی به قاعده استوانه رسم شده است که 14cm از قاعده فاصله دارد ارتفاع مخروط واستوانه 21cm است اگر شعاع قاعده هریک آنها 6cm باشد

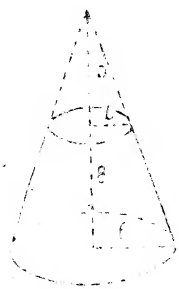


شکل (۱۱ـ۷)

مساحت مقطع استوانه با مستوی P دریافت نمائید وحجم ساحه بین مخروط واستوانه را بالاتر از

مقطع دریافت نمائید ؟

۱۰ - اگر ارتفاع یک مخروط ناقص 8cm وشعاع قاعده فوقانی آن 4cm وشعاع قاعده تحتانی آن 6cm باشد حجم آنرا دریافت نمائید شکل (۱۲ - ۷) .



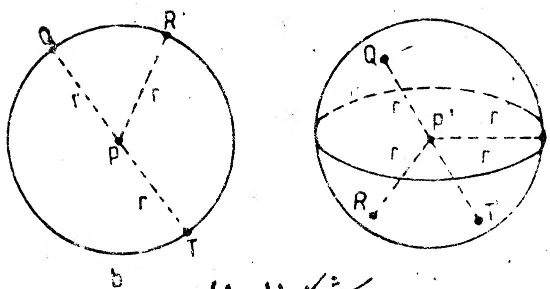
شکل (۱۲ - ۷)

فصل هشتم

(۱ـ۸) دایره وکره :

دایره عبارت ازیک سطح محدود مدور دریک مستوی وکره عبارت ازیک جسم مستدیره توپ مانندی باشد تعریفات ذیل آنهارا دقیقاً توضیح میکند .

تعریف: فرضاً P نقطه ازیک مستوی و r یک عدد مثبت باشد دایره بامرکز P وشعاع r عبارت ازست تمام نقاط است که فاصله آنها از P مساوی به r باشد . شکل (b ـ ۸) .



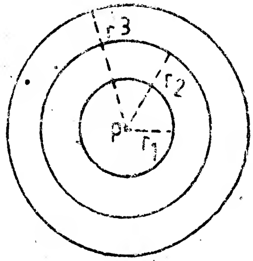
شکل (۱ـ۸)

تعریف: اگر P یک نقطه فضاء و r یک عدد مثبت باشد کره بامرکز P وشعاع r عبارت ازست تمام نقاط فضاء است که فاصله آنها از P مساوی به r باشد مانند شکل (a ـ ۸) .

دایره ها وکره های متحد المرکز:

دایره ها وکره های متحد المرکز نامیده می شوند که دارای عین مرکز بوده وشعاعات آنها مساوی و

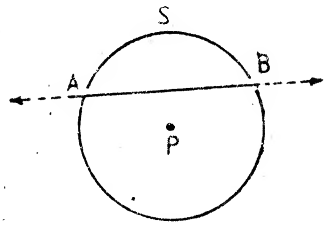
یا متفاوت باشد شکل (۲ - ۸) .



شکل (۲ - ۸)

(۲ - ۸) وتر دایره :

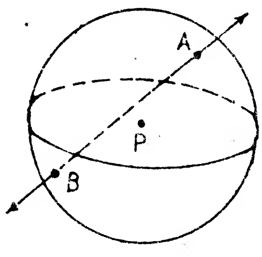
وتر دایره قطعه خط است که انجام های آن به روی محیط دایره واقع شده باشد در شکل (۳ - ۸) خط مستقیم $\overline{AB}$ عبارت از وتر دایره P است و قسمت $\widehat{ASB}$ دایره را قوس دایره می نامند .



شکل (۳ - ۸)

(۳ - ۸) وتر کره :

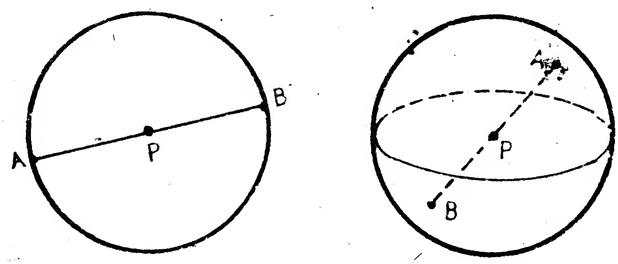
قطعه خط مستقیم که دو نقطه سطح کره را باهم وصل می کند عبارت از وتر کره است . در شکل (۴ - ۸) قطعه $\overline{AB}$ وتر کره P است .



شکل (۴ - ۸)

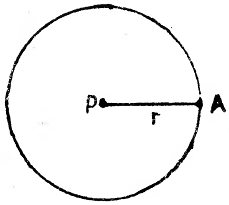
قطر کره و یا دایره :

وتر یکه از مرکز دایره و یا کره بگذرد قطر نامیده می شود اشکال (۵ - ۸) .



اشکال (۵ - ۸)

شعاع کره ویا دایره :



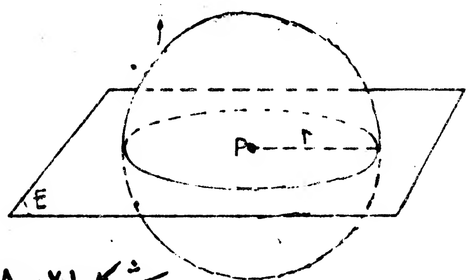
شکل (۶ - ۸)

قطعه خط که مرکز کره ویا دایره رابه محیط آن وصل نماید شعاع کره ویا دایره نامیده می شود . شکل (۶ - ۸) .

(۴ - ۸) دایره کبیره :

تقاطع یک کره P بایک مستوی که ازمرکز آن بگذرد عبارت از دایره کبیره است که مرکز آن مرکز کره P وشعاع آن شعاع کره P است .

درشکل (۷ - ۸) ، ۲ عبارت از شعاع کره ودایره است .



شکل (۷ - ۸)

برای اینکه بدانید که موضوع فوق حقیقت دارد ویا نه ؟

تعریف کره ودایره را دوباره به یاد بیآورید .

کره S بامرکز P ، شعاع ۲ ومستوی E داده شده است .

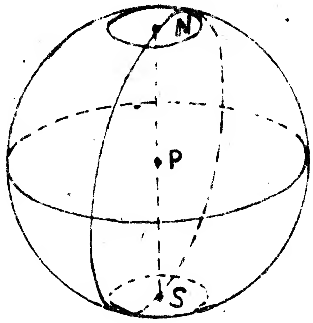
کره S عبارت ازست نقاط است که فاصله آنها از P مساوی به ۲ باشد تقاطع کره S بامستوی E عبارت ازست نقاط که فاصله آنها از P مساوی ۲ است . تقاطع کره S بامستوی E درصورتیکه E ازمرکز عبور نماید دایره کبیره (عظیمه) است .

تعریف : تقاطع یک مستوی باکره عبارت ازدایره است اگر مستوی ازمرکز کره عبور نماید دایره حاصله را دایره کبیره نامند شکل (۸ - ۸) .

کلانترین دایره که به اطراف مادل کره زمین رسم شده دایره استوا ویا خط استوا نامیده می شود واین دایره خط است که از اثر تقاطع مستوی که ازمرکز کره زمین گذشته درروی سطح

زمین ترسیم می گردد .

مستوی های که موازی به مستوی استوا رسم گردد تقاطع آنها با سطح کره زمین دوایر است که عرض البلد نامیده می شوند و کوچکتر از دایره خط استوا می باشند و این دوایر به حوالی قطب خیلی کوچک می شوند شکل (۸ - ۸) .



شکل (۸ - ۸)

تمرینات

۱- آیا وتر یک دایره قاطع داده است؟

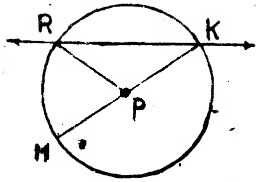
۲- در شکل (۹ - ۸) نام قسمت ذیل چیست:

(a) - $\overline{MK}$ (b) - $\overline{RK}$

(c) - P (d) - $\overline{PR}$

(e) $\overline{PK}$ (f) - R

(g) $\overline{PM}$ (h) - M



شکل (۹ - ۸)

۳- اگر $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ دو قطر یک دایره باشند شکل (۱۰ - ۸)

ثابت نمائید که:

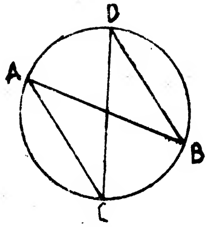
$\overline{AC} = \overline{BD}$ و $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ است؟

۴- کدام یکی از جملات ذیل صحت اند :

a - امکان دارد که یک خط با دایره تقاطع نکند.

b - هر قطر یک کره قاطع کره نیز است

c - تمام شعاعات یک کره باهم انطباق پذیراند.



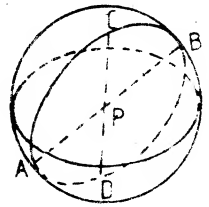
شکل (۱۰ - ۸)

d هر قطر یک کره قطر دایره کبیره نیز است.

e هر شعاع دایره وتر دایره هم است.

f هر قاطع یک کره محض کره را در یک نقطه قطع می نماید.

۵- کره S بامرکز P ومستوی E داده شده است اگر نقطه P در مستوی E واقع باشد تقاطع $E \cap S$ عبارت است از . . . .



شکل (۱۱ – ۸)

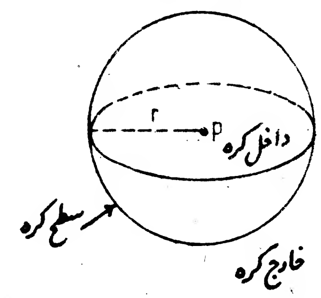
۶- اگر $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ دو قطر یک کره باشند ثابت نمائید که شکل ABCD یک مستطیل است شکل (۱۱ – ۸) .

(۵ – ۸) مستوی های مماس :

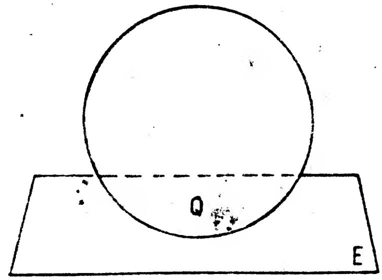
تعریف :

داخل کره عبارت از ست نقاط است که مسافه آنها از مرکز کره کمتر از شعاع کره باشد ونقاط خارج کره ست نقاط است که مسافه آنها زیادتر از شعاع کره باشد.

هر نقطه از فضا یا داخل کره یا بالای سطح کره ویا خارج از کره واقع می شود شکل (۱۲ – ۸) .



شکل (۱۲ – ۸)



شکل (۱۳ – ۸)

تعریف :

اگر مستوی باکره یک نقطه مشترک داشته باشد مستوی باکره مماس است ونقطه مشترک را نقطه تماس نامند .

در شکل (۱۳-۸) مستوی E با کره در نقطه Q مماس است (اگر توپ را بالای میز قرار دهید نقطه تماس آنها را مشاهده نموده میتوانند)

(۶ ـ ۸) دعوی :

اگر مستوی به انجام خارجی شعاع کره عمود باشد مستوی مذکور به کره مماس می باشد .

ثبوت : اگر مستوی E در نقطه Q بالای شعاع $\overline{PQ}$ عمود باشد

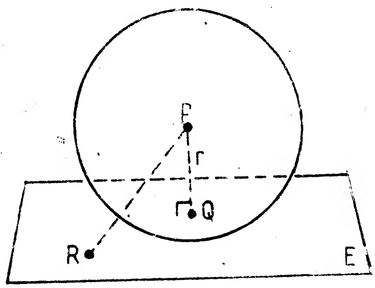
الحال باید نشان دهیم که نقطه دیگری از مستوی E به روی کره واقع نشده است.

فرضاً R نقطه دیگری از E است

که به روی کره قرار دارد چون می دانیم که .

کوتاه ترین فاصله بین E و P عبارت

از عمود است پس $\overline{PR} > \overline{PQ}$



شکل (۱۴ ـ ۸)

ویا $\overline{PR} > r$ است

پس نقطه R به روی کره واقع نیست شکل (۱۴ ـ ۸) .

دعوی :

هر مستوی مماس به یک نقطه کره عمود به شعاع کره در نقطه تماس با مستوی می باشد .

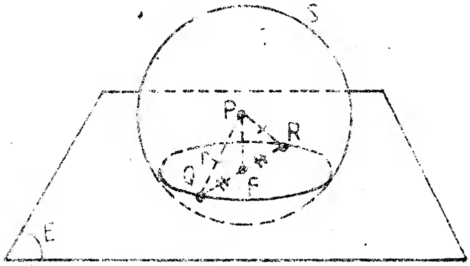
ثبوت : مستوی E مماس با کره S در نقطه Q می باشد فرضاً اگر مستوی E عمود بالای $\overline{PQ}$ نباشد ما باید نشان دهیم که این فرضیه غلط است شکل (۱۵ ـ ۸) ثبوت را بصورت غیر مستقیم ارایه می نماید.

فرضاً F پایه عمود از نقطه P بالای مستوی E است پس درین صورت نقطه $F \neq Q$ (F و Q دو نقطه متفاوت) است . اگر R نقطه دیگری مقابل Q بالای $\overline{FQ}$ باشد طوریکه $\overline{FQ} = \overline{FR}$ است .

لذا $\triangle PFQ \cong P\hat{F}R$ (دو ضلع زاویه بین از یکی مثلث مساوی به دو ضلع و زاویه بین مثلث دیگر میباشند)

پس $\overline{PR} = \overline{PQ} = r$

نقطه R بالای محیط کره واقع است.

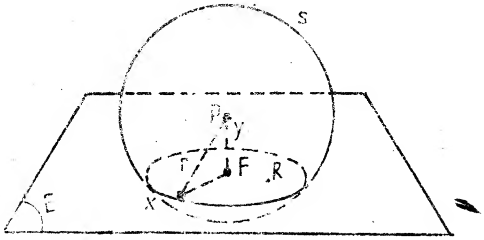


شکل (۱۵-۸)

پس مستوی E کره را در نقطه دیگری بدون از Q قطع می نماید واین مسئله ناممکن است زیرا مستوی E به کره مماس بوده وقاطع نیست.

(۷ ـ ۸) دعوی:

اگر یک مستوی E کره P را قطع نماید تقاطع آنها عبارت از دایره است که مرکز این دایره عبارت از پایه عمود است که از مرکز P کره بالای مستوی E رسم گردد.



شکل (۱۶-۸)

ثبوت: اگر مستوی E داخل کره S را در نقطه R قطع نماید واگر F پایه عمود از نقطه P به مستوی E باشد ما نشان میدهیم که تقاطع E و S عبارت از دایره است که مرکز آن F است شکل (۱۶-۸).

میدانیم که $\overline{PR} < r$ است (زیرا نقطه R داخل کره واقع شده است)

وهم میدانیم که $\overline{PF} < \overline{PR}$ است (عمود کوچکتر است از مایل)

پس $\overline{PF} < r$ است وهم اگر $\overline{PF} = y$ باشد.

I ـ اگر x نقطه تقاطع مستوی E وسطح کره S باشد پس مثلث PFX قایم الزاویه است که نظریه دعوی فیثاغورث داریم که:

$$y^2 + \overline{FX}^2 = r^2$$

$$\overline{FX} = \sqrt{r^2 - y^2}$$

پس X بالای دایره واقع است که شعاع آن $\sqrt{r^2 - y^2}$ و مرکز آن F است .

پس تقاطع E و S عبارت از دایره است که شعاع آن $\sqrt{r^2 - y^2}$ و مرکز آن F است .

II ــ فرضاً X یک نقطه در مستوی E به روی دایره که مرکز آن F و شعاع آن $t = \sqrt{r^2 - y^2}$ باشد نظر به دعوی فیثاغورث داریم که :

$$\overline{PX}^2 = t^2 + y^2$$

$$= (\sqrt{r^2 - y^2})^2 + y^2 = r^2 \longrightarrow \overline{PX}^2 = r^2$$

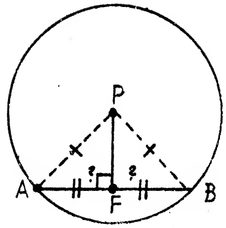
پس $PX = r$ و X بالای سطح کره واقع است .

(۸ ـ ۸) دعوی :

عمودیکه از مرکز کره به روی وتر آن رسم گردد وتر را تنصیف می نماید شکل (۱۷ ـ ۸)

ثبوت : از نقطه P به روی $\overline{AB}$ عمود $\overline{PF}$ را رسم می نمائیم

مثلث های $\overset{\triangle}{PAF}$ و $\overset{\triangle}{PBF}$ انطباق پذیر اند زیرا :



شکل (۱۷ ـ ۸)

$\overline{PA} = \overline{PB}$ . . . . شعاع کره

$\overline{PF} = \overline{PF}$ . . . . مشترک

$\hat{PFA} = \hat{PFB}$ . . . . قایمه اند

لذا $\overline{FA} = \overline{FB}$ . . . . است

(۹ ـ ۸) دعوی :

خط مستقیم که نقطهٔ تنصیف وتر را با مرکز کره وصل می نماید، بالای وتر عمود می باشد شکل (۱۸ ـ ۸)

ثبوت : F نقطهٔ وسط وتر $\overline{AB}$ را به P وصل می کنیم

مثلث های $\overset{\triangle}{PFA}$ و $\overset{\triangle}{PFB}$ انطباق پذیر اند زیرا :

$\overline{PF} = \overline{PF}$ . . . . . مشترک اند .

$\overline{PA} = \overline{PB}$ . . . . . شعاع کره اند .

تمرینات

۱- نقاط R ، T بالای مستوی P واقع اند نظر به کدام دلیل، خط $\overline{RT}$ بر مستوی P واقع است؟

۲- اگر خط مستقیم ℓ بر مستوی P واقع نباشد خط مستقیم ℓ مستوی P را در چند نقطه قطع خواهد نمود؟

۳- از دو نقطه چند مستوی عبور خواهد نمود که هر دو نقطه شامل آنها باشد؟

۴- از سه نقطه چند مستوی عبور خواهد نمود که هر سه نقطه شامل آن باشد؟

۵- دو خط مستقیم در فضا می تواند چند نقطه مشترک داشته باشد؟

٦- اگر خط مستقیم $\overline{AB}$ و مستوی P دو نقطه مشترک M و K داشته باشند آیا مستقیم $\overline{AB}$ بر مستوی P واقع است؟

۷- میزکه دارای چارپایه است یک پایه آن، بعضاً بالای سطح زمین خوب نمی چسپد ولی میزکه دارای سه پایه باشد ازین نقیصه مبرا است چرا؟

۸- نقاط A ، B و C بر روی مستوی P قرار دارند و هم نقاط A ، B و C بر روی مستوی $\bar{P}$ قرار دارند مستوی های P و $\bar{P}$ باهم چه ارتباط دارند؟

۹- مستوی P را رسم نمائید که دو خط مستقیم متقاطع ℓ_1 و ℓ_2 در آن واقع باشد خط مستقیم ℓ_3 را رسم نمائید که بر مستوی P واقع نبوده ، ℓ_1 و ℓ_2 را قطع نماید آیا ممکن است؟

۱۰- کدام یکی از جملات ذیل صحت است :

a - دو نقطه بالای یک خط مستقیم واقع است .

b- اگر سه نقطه بالای یک مستقیم واقع باشد نقاط مذکور محض روی یک مستوی واقع اند؟

c- اگر سه نقطه بالای یک مستوی واقع باشند بالای یک مستقیم نیز واقع اند؟

۱۱- آیا دو نقطه می تواند بالای یک مستقیم واقع نباشد؟

۱۲- کمترین تعداد نقاط که a ، b و c را بصورت حتمی معرفی نماید چند است؟

پیشگفتار

این کتاب را به پیشگاه مجاهدین سربکفی که در سنگرهای داغ جهاد بخاطر اعلای کلمة الله و آزادی افغانستان از چنگال امریکنان زمان جانبازی می نمایند.

وبه انانیکه در برابر دین مقدس اسلام جامعه وهم نوعان خویش احساس مسؤلیت نموده و در راه به سر رسانیدن آن جد وجهد می کنند.

وبالاخره به آن نوجوانانیکه غرض اعمار افغانستان ویران امادگی می گیرند پیشکش می نمایم.

واضح است که دین اسلام جامع همه علوم بوده وعلوم طبیعی نیز از دایرهٔ آن خارج مانده نمی تواند لذا اگر خلاف رسم قدیم علوم طبیعی در روشنی وهدایات اسلامی تهیه وتدریس گردد آموزش آموزندهٔ مسلمان را سریعتر وثمرهٔ آنرا وسیعتر می گرداند. بناً کتاب هندسه صنف یازدهم با درنظرداشت اهداف فوق تهیه گردیده است.

کتاب هندسه صنف یازدهم که قبلاً تهیه شده بود ومورد استفاده قرار داشت ازینکه اشتباهات آن زیاد ودر ساحه نظر وعمل موانع در راه تطبیق واستفاده ازآن موجود بود بناً اینجانب کوشش بعمل آورد تا اشتباهات را رفع، متن کتاب وسوالات را باهم مرتبط گرداند وعلاوتاً مسایلی درآن بگنجاند که نیازمندی های شاگردان را مرفوع گرداند. از برادران مربی آرزومندم که در بهتر شدن هرچه بیشتر کتاب ورفع اشتباهات آن کمک های خودرا دریغ نفرمایند.

از استاد محترم فضل یار استاد پوهنځی علوم طبیعی، محترم یار محمد خان معلم لیسه عمر فاروق (رض) محترم غلام داوُد خان معلم لیسه عمر ثانی (رض)، محترمه زاهده معلم لیسه ملالی ومحترم آدم خان معلم لیسه اتحاد هنگو که با مشوره ها ونظریات نیک خویش در بخش تصحیح این کتاب همکاری نموده اند وهمچنان از محترم کاتب خان ومحترم عبدالله خان که در بخش خطاطی ورسامی آن همکاری نموده اند ابراز امتنان می نمایم.

ومن الله التوفیق

استاد غلام سخی

فهرست

عنوان	صفحه
فصل اول : تعریفات	۱
تعریف (شناساندن)	۱
اصطلاحات اولیه	۲
دلیل ویا برهان	۲
قضیه	۲
اصل متعارفات	۲
نقطه	۳
خط مستقیم	۳
مستوی	۳
فضاء	۴
شکل	۴
سطح	۵
خط و مستوی درفضاء سه بعدی	۵
اوضاع نسبی دو مستقیم در فضاء	۶
اوضاع نسبی دو مستوی	۷
تمرینات	۹
فصل دوم : مستقیم های متوازی در فضاء	۱۱
تعریف	۱۱

عنوان	صفحه
دعوی	۱۱
دعوی	۱۲
دعوی	۱۳
قطعه خط های موازی و هم جهت	۱۳
دعوی	۱۴
نتایج	۱۴
زاویه بین دو مستقیم متنافر	۱۵
تعریف	۱۵
تمرینات	۱۶
دعوی	۱۷
تمرینات	۱۹
مستقیم های موازی بدو مستوی متقاطع	۲۰
دعوی	۲۰
مستقیم های موازی بدو مستقیم	۲۰
دعوی	۲۰
تمرینات	۲۱
دعوی	۲۱
دعوی	۲۲
تمرینات	۲۲

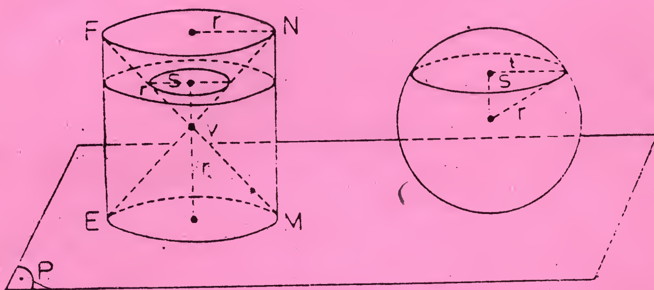
عنوان	صفحه
فصل سوم : مستقیم ها و مستوی های متعامد در فضاء	۲۳
تعریف	۲۳
دعوی	۲۳
تمرینات	۲۴
دعوی	۲۷
دعوی	۲۸
تمرینات	۲۹
دعوی	۳۰
دعوی	۳۱
دعوی	۳۲
دعوی	۳۲
تمرینات	۳۳
دعوی	۳۵
دعوی	۳۶
تمرینات	۳۷
فصل چهارم : مستوی های متوازی	۴۰
تعریف	۴۰
دعوی	۴۱
دعوی	۴۱

عنوان	صفحه
دعوی	۴۲
دعوی	۴۲
دعوی	۴۳
دعوی	۴۴
تمرینات	۴۵
زاویه دو وجهی یا فرجه	۴۸
زاویه سطحه یک دو وجهی	۴۸
دعوی	۴۹
دعوی	۵۰
دعوی	۵۰
تمرینات	۵۱
سه وجهی ها	۵۳
سه وجهی قایم	۵۴
کنج و یا زاویه جامده	۵۴
ارتسام	۵۵
تعریف	۵۵
دعوی	۵۶
دریافت طول مرتسم یک قطعه خط به روی مستوی	۵۶
تعریف	۵۷

عنوان	صفحه
سطح جانبی منشور قایم	۷۴
مساحت کلی منشور	۷۴
متوازی السطوح	۷۵
مکعب مستطیل	۷۵
مکعب	۷۶
تمرینات	۷۷
حجم هرم و منشور	۷۸
دعوی	۷۹
دعوی	۷۹
دعوی	۸۰
تمرینات	۸۳
فصل هفتم : استوانه و مخروط	۸۴
استوانه	۸۴
مخروط	۸۵
دعوی	۸۵
دعوی	۸۶
دعوی	۸۶
دعوی	۸۸
تمرینات	۸۹

هندسه

فضائی



صنف 11

غلام سخی

۱۳۶۷

صفحه	عنوان

عنوان		صفحه
	تمرينات	۵۸
فصل پنجم :	هرم	٦١
	تعريف	٦١
	مقطع هرم	٦٣
	دعوی	٦٣
	دعوی	٦۵
	دعوی	٦٦
	تمرينات	٦٧
فصل ششم :	منشور	٧٠
	سطح منشور	٧٠
	مقطع قايم	٧١
	منشور	٧١
	سطح جانبی منشور	٧١
	ارتفاع منشور	٧٢
	منشور قايم	٧٢
	منشور مايل	٧٢
	منشور منظم	٧٢
	منشور ناقص	٧٣
	مساحت جانبی منشور	٧٣

عنوان	صفحه
فصل هشتم : دایره وکره	۹۲
تعریف	۹۲
دایره ها وکره های متحدالمرکز	۹۲
وتر دایره	۹۳
وتر کره	۹۳
قطر کره ویا دایره	۹۳
شعاع کره ویا دایره	۹۴
دایره کبیره	۹۴
تعریف	۹۴
تمرینات	۹۵
مستوی های مماس	۹۶
دعوی	۹۷
دعوی	۹۷
دعوی	۹۸
دعوی	۹۹
دعوی	۹۹
تمرینات	۱۰۰
حجم کره	۱۰۱
مساحت مقطع کره	۱۰۲

عنوان	صفحه
مساحت کره	۱۰۴
تمرینات	۱۰۵
فصل نهم : چند وجهی ها،	۱۰۸
چند وجهی محدب	۱۰۹
چند وجهی مقعر	۱۰۹
قطر چند وجهی	۱۰۹
داخل و خارج یک چند وجهی	۱۰۹
چند وجهی منظم	۱۱۰
شش وجهی منظم	۱۱۱
دوازده وجهی منظم	۱۱۲
تمرینات	۱۱۳
تمرینات	۱۱۴

هندسه فضائی

برای صنف یازدهم

مؤلف : غلام سخی

سال ۱۳۷۲

Ghulam Sakhi

GEOMETRY

For 11th Grade

INTERNATIONAL RESCUE COMMITTEE

Development Center for Afghan Education

DCAE Publication

April 1988

Peshawar

بسم الله الرحمن الرحيم

این نشریه مخصوص متعلمان مهاجر ومجاهد سر بکف راه آزادی افغانستان عـزیز بوده وطور رایگان به دسترس شان قرارمی گیرد. لذا خرید و فروش آن ممنوع است.حق چاپ مربوط مرکـز انکشافی تعـلیم وتربیه افغانها بوده وچـاپ آن به اجـــازه مرکز مذکور صورت خواهد گرفت.

پیشگفتار

مدت چندین سال میشود که مؤسسه خیریه آی - آر - سی خدمات صحی را برای مهاجرین افغان در پاکستان انجام میدهد بنابر نیازمندی های روزافزون تعلیم و تربیه تنظیم های گوناگون جهادی مؤسسات مختلف خیریه و حکومت پاکستان سعی ورزیده اند تا پیشبرد یک سلسله خدمات مثمر تعلیم و تربیه را برای اولاد معصوم مهاجرین و مجاهدین افغان عهده دار شوند. مؤسسه خیریه آی - آر - سی نیز به نوبه خود در اوایل ۱۹۸۵ تصمیم گرفت تا در پهلوی خدمات صحی خدمات لازم تعلیم و تربیه را بخاطر ارتقاء سطح دانش اولاد مهاجرین و مجاهدین افغان تقدیم دارد. بعداز انجام یک سلسله تحقیقات و مشوره ها با دانشمندان و استادان افغانی چنین نتیجه بدست آمد که بمیان آوردن یک مرکز تعلیمی و تربیوی برای استادان لیسه ها و مکاتب متوسطه و تحریر کتب درسی برای صنوف هفتم و بالاتر از آن اشد ضرورت می باشد .

هدف این مؤسسه عبارت از کمک به اولاد افغان بدون در نظر داشت هر نوع تبعیض بوده مؤسسه سعی می ورزد، تا پالیسی بیطرفانه خود را در مسائل سیاسی و تنظیمی حفظ کرده بصورت مساویانه مصدر خدمات برای تمام تنظیم ها و مهاجرین افغان گردد .

در پهلوی مشکلات دیگر تعلیمی ، عدم موجودیت کتاب های درسی خاصتاً در صنوف عالی یکی از پرابلم های عمده بوده که دامن گیر مکاتب مهاجرین افغان میباشد. چون مؤسسه در بخش مضامین سائنس و ریاضی استادان ورزیده ، و تسهیلات لازم داشته لذا تصمیم اتخاذ گردید تا کتابهای ریاضی و سائنس را برای صنف هفت و بالاتر از آن با در نظر داشت شرایط حساس جهاد و زندگی مهاجرین تحت رهنمای های دین مقدس اسلام و حفظ اساسات اصیل کلتور افغانی تحریر کرده و بعداز ارزیابی و اصلاحات لازم ذریعه استادان لیسه های مختلف و دانشوران افغانی و کشتری افغان کتابها چاپ شده و بطور رایگان به دسترسی متعلمین و استادان مکاتب مهاجرین از طریق مؤسسات مربوطه آنها گذاشته شود. امید است که خوانندگان محترم از روی همکاری نظریات مفید و ثمر بخش شانرا به مؤسسه تعلیم و تربیه آی - آر - سی اطلاع دهند به امید موفقیت و همکاری های بیشتر تان .

وَمِنَ اللّٰهِ التَّوفِيق

اداره